CAPÍTULO 1

Exercícios 1.2

2.*n*) Como $x^2 + 3 > 0$ para todo x, o sinal de $x(x^2 + 3)$ é o mesmo que o de x; logo, $x(x^2 + 3) < 0$ para $x < 0$; $x(x^2 + 3) = 0$ para $x = 0$; $x(x^2 + 3) > 0$ para $x > 0$.

3. *n*) Como $x^2 + 1 > 0$ para todo x, multiplicando-se os dois membros por $\dfrac{1}{x^2 + 1}$ e, tendo em vista a compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação, obtém-se:

$$(2x - 1)(x^2 + 1) < 0 \Leftrightarrow 2x - 1 < \frac{0}{1 + x^2} \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}.$$

4.

$$\begin{array}{llll|l}
x^3 & & & -a^3 & x - a \\ \cline{5-5}
-x^3 & +ax^2 & & & x^2 + ax + a^2 \\
 & -ax^2 & +a^2x & & \\
 & & -a^2x & +a^3 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

8. *a*) $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}\right)$. Agora é só observar que $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ e $\dfrac{-b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a} = -\dfrac{\Delta}{4a^2}$.

14. Como $x^2 + 1 > 0$ para todo x, multiplicando-se os dois membros por $x^2 + 1$ e lembrando da compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação, tem-se:

$$\frac{5x + 3}{x^2 + 1} \geq 5 \Leftrightarrow 5x + 3 \geq 5(x^2 + 1)$$

15. Falsa. Para $x > 2$, a afirmação será verdadeira, pois, neste caso, teremos $x - 2 > 0$ e pela compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação teremos:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 2} > 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 3(x - 2)$$

Para $x < 2$, teremos $x - 2 < 0$, e daí e pela compatibilidade mencionada anteriormente

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 2} > 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 < 3(x - 2)$$

16. Sendo $\alpha \neq 0$ raiz de $P(x)$ deveremos ter $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$. Dividindo os dois membros por α, resulta: $a_0\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + ... + a_{n-1} = -\dfrac{a_n}{\alpha}$. Como o primeiro membro dessa igualdade é número inteiro, pois, por hipótese, α, a_0, a_1, ..., a_{n-1} são inteiros, resulta que $\dfrac{a_n}{\alpha}$ é um número inteiro, logo, α é divisor de a_n.

17. *a*) Como os coeficientes do polinômio $x^3 + 2x^2 + x - 4$ são números inteiros, o número inteiro α terá chance de ser raiz da equação se α for divisor do termo independente -4. Os divisores de -4 são: $1, -1, 2, -2, 4$ e -4. Para verificar se algum destes números é raiz, o único jeito é substituí-lo na equação. Por substituição na equação verifica-se, então, que 1 é raiz e que os demais não são raízes. Conclusão: 1 é a única raiz inteira da equação.

18. Tendo em vista a sugestão, $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$, onde $Q(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ e R um número. Substituindo x por α, resulta $P(\alpha) = R$. Se α for raiz, teremos $P(\alpha) = 0$ e, portanto, $R = 0$, o que significa que $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$. Reciprocamente, se $P(x)$ for divisível por $(x - \alpha)$, teremos $R = 0$ e, portanto, $P(\alpha) = 0$, ou seja, α é raiz de $P(x)$.

19. *a*) Primeiro vamos verificar se $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ admite raízes inteiras. Os candidatos a raízes inteiras são os divisores $-1, 1, -2$ e 2 do termo independente -2. Substituindo em $P(x)$, verifica-se que -1, 1, e -2 são raízes. Segue que $P(x)$ é divisível por $(x - (-1)) = (x + 1)$. Dividindo obtém-se $P(x) = (x + 1)\,(x^2 + x - 2)$. Sendo 1 raiz de $P(x)$, mas não raiz de $x + 1$, resulta que 1 é raiz do quociente $x^2 + x - 2$, logo, tal quociente é divisível por $x - 1$; efetuando-se a divisão obtém-se
$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Segue $P(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)$ que é a forma fatorada do polinômio dado.

20. *a*) 1.º Processo. $x^3 - 1$ é divisível por $x - 1$, pois 1 é raiz de $x^3 - 1$; efetuando-se a divisão, obtém-se $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Segue que a inequação é equivalente a $(x - 1)(x^2 + x + 1) > 0$. Como $x^2 + x + 1 > 0$ para todo x, tal inequação é equivalente a $x - 1 > 0$ e, portanto, equivalente a $x > 1$ que é a solução da inequação.
2.º Processo. Tendo em vista a equivalência "$x < y \Leftrightarrow x^3 < y^3$ quaisquer que sejam x e y" (veja Exercício 22), segue que $x^3 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 > 1^3 \Leftrightarrow x > 1$.

21. Falsa. Pois, $-5 < -3 \Rightarrow (-5)^2 > (-3)^2$. **Observação.** É verdadeira a seguinte afirmação: quaisquer que sejam $x > 0$ e $y > 0$, tem-se $x > y \Leftrightarrow x^2 > y^2$. De fato, de $x > 0$ e $y > 0$ segue $x + y > 0$; pela compatibilidade da relação de ordem com a adição (veja propriedade OA, no livro-texto, página 3), $x > y \Leftrightarrow x - y > y - y \Leftrightarrow x - y > 0$.
De $x + y > 0$ e pela compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação (veja propriedade OM, no livro-texto, página 3), tem-se
$x - y > 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) > 0\ (x + y) \Leftrightarrow x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 > y^2$.

22. Já sabemos que $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Temos, também, se $x > 0$ e $y > 0$ (ou $x < 0$ e $y < 0$), então $x^2 + xy + y^2 > 0$. Faremos a prova considerando três casos.

1.º Caso. Neste primeiro caso, faremos a prova supondo $x > 0$ e $y > 0$. Temos:
$x < y \Leftrightarrow x - y < 0$. Como $x^2 + xy + y^2 > 0$, multiplicando-se os dois membros de $x - y < 0$ por $x^2 + xy + y^2$ e lembrando da compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação,

resulta $(x-y)(x^2+xy+y^2)<0\,(x^2+xy+y^2)$, que é equivalente a $x^3-y^3<0$, que por sua vez é equivalente a $x^3<y^3$. Portanto, admitindo $x>0$ e $y>0$, teremos $x<y \Leftrightarrow x^3<y^3$.

2.º Caso. Neste segundo caso suporemos $x<0$ e $y<0$. Sendo $x<0$ e $y<0$ teremos, também, $x^2+xy+y^2>0$. Agora é só repetir o raciocínio do 1.º caso.

3.º Caso. Neste 3.º caso suporemos $x<0$ e $y>0$. Sendo $x<0$ teremos, também, $x^3<0$ e reciprocamente. Por outro lado, sendo $y>0$, teremos, também, $y^3>0$ e reciprocamente. Portanto, supondo $x<0$ e $y>0$, teremos, $x<y \Leftrightarrow x^3<y^3$.

23. ***a***) Sabemos que $0+0=0$ (A3). Daí, $x\cdot(0+0)=x\cdot 0$. Pela distributividade da multiplicação em relação à adição, $x\cdot 0+x\cdot 0=x\cdot 0$. Pela lei do cancelamento, $x\cdot 0=0$. (Observe que a lei do cancelamento depende apenas da propriedade associativa e da existência de oposto. Veja Exemplo 2, livro-texto, página 5.)

b) $x+(-x)=0$; $[x+(-x)]\cdot y=0\cdot y$. Pela propriedade distributiva e tendo em vista (***a***), resulta $xy+(-x)y=0$. Somando a ambos os membros o oposto de xy, obtemos $(-x)y=-xy$. De forma análoga, prova-se que $x(-y)=-xy$. Vamos, agora, à prova de que $(-x)(-y)=xy$. Temos, $[x+(-x)][y+(-y)]=0$. Pela propriedade distributiva, $xy+x(-y)+(-x)y+(-x)(-y)=0$. De $x(-y)=-xy$ e $(-x)y=-xy$ e lembrando que $xy+(-xy)=0$ resulta $-xy+(-x)(-y)=0$. Somando xy aos dois membros, obtemos $(-x)(-y)=xy$.

c) Seja x um real qualquer. Pela (O4), $x\leqslant 0$ ou $x\geqslant 0$. Supondo $x\leqslant 0$ e somando o oposto de x aos dois membros, resulta $0\leqslant -x$; pela (OM), $0\cdot(-x)\leqslant(-x)(-x)$ e, portanto, $0\leqslant x\cdot x$, ou seja, $0\leqslant x^2$. Assim, se $x\leqslant 0$, teremos $x^2\geqslant 0$. Supondo, agora, $x\geqslant 0$ e lembrando, novamente, de (OM) teremos $x\cdot x\geqslant x\cdot 0$ e, portanto, $x^2\geqslant 0$. Dessa maneira fica provado que, para todo x real, tem-se $x^2\geqslant 0$.

d) Como $1^2=1\cdot 1=1$ e $1\neq 0$ (M3), tendo em vista (***c***), resulta $1>0$.

e) Para $x\neq 0$, $x\cdot x^{-1}=1$ (M4) e, portanto, teremos também $x^{-1}\neq 0$. Assim, para $x\neq 0$, $x^{-1}\cdot x^{-1}>0$. Supondo, agora, $x>0$ e multiplicando-se ambos os membros da última desigualdade por x, obtemos $x\cdot(x^{-1}\cdot x^{-1})>x\cdot 0$; pela (M1), $x\cdot(x^{-1}\cdot x^{-1})=(x\cdot x^{-1})\cdot x^{-1}$, e lembrando que $x\cdot x^{-1}=1$, resulta $x^{-1}>0$. Assim, se $x>0$ teremos, também, $x^{-1}>0$. Supondo, agora, $x^{-1}>0$ teremos $x\neq 0$ e, portanto, $x^2>0$; multiplicando-se os dois membros por x^{-1} e lembrando de (OM), teremos $x^{-1}\cdot x^2>x^{-1}\cdot 0$, ou seja, $(x^{-1}\cdot x)\cdot x>0$ e portanto, $x>0$. Fica provado assim que $x>0$ é equivalente a $x^{-1}>0$.

f) Supondo $xy=0$ vamos provar que $x=0$ ou $y=0$. Se $x\neq 0$ teremos, também, $x^{-1}\neq 0$; multiplicando-se os dois membros de $xy=0$ por x^{-1} vem $x^{-1}\cdot(xy)=x^{-1}\cdot 0$ e daí $(x^{-1}\cdot x)\cdot y=0$; lembrando que $x\cdot x^{-1}=1$, resulta $y=0$. Se tivermos $y\neq 0$, raciocinando de forma análoga, conclui-se que $x=0$. Fica provado então que $xy=0\Rightarrow x=0$ ou $y=0$. A recíproca é imediata.

g) $x^2=y^2\Leftrightarrow x^2-y^2=0\Leftrightarrow(x-y)(x+y)=0\Leftrightarrow x-y=0$ ou $x+y=0\Leftrightarrow x=y$ ou $x=-y$

h) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ ou $x + y = 0$; da hipótese $x \geq 0$ e $y \geq 0$ segue que $x + y = 0$ só ocorrerá se $x = 0$ e $y = 0$. Assim, se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$.

Exercícios 1.3

3. ***j***) Primeiro vamos estudar o sinal da expressão dentro do módulo, no caso, $2x - 1$. Temos: $2x - 1 \leqslant 0$ para $x \leqslant \frac{1}{2}$ e $2x - 1 > 0$ para $x > \frac{1}{2}$. Para resolver a equação, vamos considerar dois casos.

1.º Caso. Neste primeiro caso vamos resolver a inequação supondo $x \leqslant \frac{1}{2}$. Para $x \leqslant \frac{1}{2}$, teremos $2x - 1 \leqslant 0$ e, portanto, $|2x - 1| = -(2x - 1) = -2x + 1$. Neste caso, teremos: $|2x - 1| < x \Leftrightarrow -2x + 1 < x \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$.

Como estamos supondo $x \leqslant \frac{1}{2}$, segue que todo x satisfazendo a condição $\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{2}$ é solução da inequação.

2.º Caso. Vamos agora resolver a inequação supondo $x > \frac{1}{2}$. Para $x > \frac{1}{2}$, $2x - 1 > 0$ e, portanto, $|2x - 1| < x \Leftrightarrow 2x - 1 < x \Leftrightarrow x < 1$.

Como estamos supondo $x > \frac{1}{2}$, segue que todo x satisfazendo a condição $\frac{1}{2} < x < 1$ é solução da inequação.

Conclusão: reunindo a solução encontrada no 1.º caso com a do 2.º caso, temos $\frac{1}{3} < x < 1$ que é a solução da inequação.

m) Primeiro vamos estudar os sinais das expressões dentro dos módulos. Temos: $x - 1 \leqslant 0$ para $x \leqslant 1$ e $x - 1 > 0$ para $x > 1$ por outro lado, $x + 2 \leqslant 0$ para $x \leqslant -2$ e $x + 2 > 0$ para $x > -2$.

Para resolver a inequação vamos considerar três casos.

1.º Caso. $x \leqslant -2$. Para $x \leqslant -2$, temos $x - 1 < 0$ e $x + 2 \leqslant 0$. Segue que $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$ e $|x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$.

Assim, a inequação $|x - 1| - |x + 2| > x$ é equivalente a $-x + 1 - (-x - 2) > x$ que, por sua vez, é equivalente a $3 > x$, ou seja, $x < 3$. Como estamos supondo $x \leqslant -2$, segue que todo x satisfazendo a condição $x \leqslant -2$ é solução da inequação.

2.º Caso. $-2 < x \leqslant 1$. Para $-2 < x \leqslant 1$, temos $x + 2 > 0$ e $x - 1 \leqslant 0$. Segue que $|x + 2| = x + 2$ e $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$.

A inequação $|x - 1| - |x + 2| > x$ é então equivalente a $-x + 1 - (x + 2) > x$ que, por sua vez, é equivalente a $-2x - 1 > x$. Resolvendo esta última inequação, obtemos

$x < \frac{-1}{3}$. Como estamos supondo $-2 < x \leqslant 1$, segue que todo x satisfazendo a condição $-2 < x < -\frac{1}{3}$ é solução da inequação.

3.º Caso. $x > 1$. Para $x > 1$, temos $x + 2 > 0$ e $x - 1 > 0$. Segue que a inequação dada é equivalente a $x - 1 - (x + 2) > x$ que, por sua vez, é equivalente a $x < -3$. Como estamos supondo $x > 1$, segue que não existe $x > 1$ que seja solução da inequação.

Conclusão: reunindo a solução obtida no 1.º caso com a do 2.º caso resulta $x < \frac{-1}{3}$ que é a solução da inequação dada.

4. Queremos provar que para $r > 0$, $|x| > r \Leftrightarrow x < -r$ ou $x > r$. De fato, sendo $r > 0$, temos:

$$|x| > r \Leftrightarrow |x|^2 > r^2 \Leftrightarrow x^2 > r^2 \Leftrightarrow (x - r)(x + r) > 0 \Leftrightarrow x < -r \text{ ou } x > r.$$

6. Queremos provar que $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$. Para isso, um caminho é procurar a condição (ou condições) que x e y devem satisfazer para que se tenha $|x + y| = |x| + |y|$. Vamos então à procura de tal condição. Temos: $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow |x + y|^2 = [|x| + |y|]^2$. Tendo em vista que

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \; [|x| + |y|]^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2,$$
$$|x|^2 = x^2, \; |y|^2 = y^2 \text{ e } 2|x||y| = 2|xy|$$

resulta

$$|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2|xy| + y^2 \Leftrightarrow xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geqslant 0.$$

(Observe que $|xy| = xy$ só poderá ocorrer se $xy \geqslant 0$.)

7. ***a***) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$ é uma conseqüência da desigualdade triangular. De fato, observando que $|x| = |x - y + y|$ e aplicando a desigualdade triangular ao segundo membro, obtemos $|x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$.

Temos, então, $|x| \leqslant |x - y| + |y|$ e, portanto, $|x - y| \geqslant |x| - |y|$.

b) Raciocinando de modo semelhante, temos $|y| = |y - x + x| \leqslant |y - x| + |x|$. Lembrando que $|y - x| = |x - y|$, resulta $|x - y| \geqslant |y| - |x|$.

c) Observando que $|\,|x| - |y|\,| = |x| - |y|$ ou $|\,|x| - |y|\,| = |y| - |x|$ e tendo em vista (***a***) e (***b***), resulta $|x - y| \geqslant |\,|x| - |y|\,|$.

Exercícios 1.6

1. Suponhamos x racional e y irracional. Seja $s = x + y$. Se s for racional, então $y = s - x$ será racional, uma vez que a diferença entre dois racionais é racional, contra a hipótese de y ser irracional. Logo, a soma de um racional com um irracional é irracional.

2. Suponhamos $x \neq 0$ racional e y irracional. Seja $z = xy$. De $x \neq 0$ segue $y = \frac{z}{x}$. Se z for racional, o quociente $\frac{z}{x}$ será, também, racional, pois o quociente entre dois

racionais é racional, contra a hipótese de y ser irracional. Logo, o produto de um racional diferente de zero por um irracional é irracional.

3. ***a***) Vamos mostrar que não existem números naturais a e b, com $b \neq 0$, tal que $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$. Podemos supor que a fração $\frac{a}{b}$ seja irredutível, pois, se não fosse, bastaria simplificá-la. Isto significa que as possibilidades para a e b são: a par e b ímpar, a ímpar e b par, a ímpar e b ímpar. Vamos mostrar que nenhuma dessas possibilidades poderá ocorrer. (Observe que o caso a par e b par foi excluído, pois estamos supondo a fração $\frac{a}{b}$ irredutível.) Inicialmente, observamos que $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$ é equivalente a $6 = \frac{a^2}{b^2}$ que, por sua vez, é equivalente a $a^2 = 6b^2$. Como $6b^2$ é par, a^2 não poderá ser ímpar, o que significa que a não poderá ser ímpar (lembre-se de que o quadrado de um número ímpar é, também, ímpar). Segue que os casos a ímpar e b par, a ímpar e b ímpar estão, também, excluídos. Assim, o único caso que deveremos analisar é a par e b ímpar. Sendo a um número par, existirá um natural m tal que $a = 2m$. Substituindo este valor de a em $a^2 = 6b^2$, teremos $(2m)^2 = 6b^2$ e, portanto, $4m^2 = 6b^2$ e, daí, $2m^2 = 3b^2$ que é uma contradição, pois $2m^2$ é par e $3b^2$ ímpar. Logo, $\sqrt{6}$ é um número irracional.

b) Suponhamos que $\sqrt{2} + \sqrt{3} = x$ com x racional. Elevando os dois membros ao quadrado, obtemos $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = x^2$. Como $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$ resulta $5 + 2\sqrt{6} = x^2$ e, portanto, $\sqrt{6} = \frac{x^2 - 5}{2}$. Como estamos supondo x racional, o segundo membro da última igualdade será racional e, portanto, $\sqrt{6}$ será racional, que está em contradição com o fato de $\sqrt{6}$ ser irracional. Logo, a soma $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ não podendo ser racional; será irracional.

4. O truque aqui é procurar eliminar os radicais e analisar o que sobrar. Vamos lá. Elevando ao cubo os dois membros de $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ e desenvolvendo o cubo no segundo membro, obtemos

$$x^3 = 2 - \sqrt{5} + 3\left(\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\right)^2 \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right)^2 + 2 + \sqrt{5}$$

e daí

$$x^3 - 4 = 3\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\,\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\left[\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right].$$

Temos

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\,\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \sqrt[3]{\left(2 - \sqrt{5}\right)\left(2 + \sqrt{5}\right)} = \sqrt[3]{-1} = -1 \text{ e } x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}.$$

Substituindo na equação acima, resulta $x^3 - 4 = -3x$, ou seja, $x^3 + 3x - 4 = 0$. Conclui-se, então, que o número real $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ é raiz da equação anterior. Por outro lado 1 é, também, raiz. Dividindo $x^3 + 3x - 4$ por $x - 1$, obtemos $x^3 + 4x - 4 = (x - 1)(x^3 + x + 4)$.

Como $x^3 + x + 4$ não admite raiz real, resulta que 1 é a **única** raiz real da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$. Como o número real $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ é raiz de tal equação, resulta que este número tem que ser 1, ou seja, devemos ter $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = 1$. *Conclusão*: o número $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ é racional e igual a 1.

8. O que queremos provar aqui é que, sendo $x > 0$ e $y > 0$ dois números reais, a média geométrica $\sqrt{xy}$ é sempre menor ou igual à média aritmética $\frac{x + y}{2}$. O truque é o seguinte: $(x - y)^2 \geqslant 0$, daí $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$. Somando aos dois membros $4xy$, resulta $(x + y)^2 \geqslant 4xy$. Como estamos supondo $x > 0$ e $y > 0$, extraindo a raiz quadrada dos dois membros, obtemos $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$ e, portanto, $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x + y}{2}$.