CAPÍTULO 10

Exercícios 10.1

1. O truque aqui é provar que para todo x, $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{e^{\alpha x}}\right) = 0$. Temos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{e^{\alpha x}}\right) = \frac{f'(x)e^{\alpha x} - \alpha\, f(x)e^{\alpha x}}{e^{2\alpha x}}.$$

Lembrando que $f'(x) = \alpha\, f(x)$ resulta no que queríamos provar. Logo, existe uma constante k tal que, para todo x, $f(x) = ke^{\alpha x}$. Fazendo na equação $y = f(x)$ resulta

$\frac{dy}{dx} = \alpha\, y \Leftrightarrow y = ke^{\alpha x}$, sendo k uma constante real.

5. Basta verificar que $g'(x) = 0$, para todo x. Temos

$g'(x) = f''(x) \operatorname{sen} x + f'(x) \cos x - f'(x) \cos x + f(x) \operatorname{sen} x$.

Lembrando que $f''(x) + f(x) = 0$ resulta $g'(x) = 0$, para todo x.
Logo, existe uma constante k tal que $f'(\text{x}) \operatorname{sen} x - f(x) \cos x = k$, para todo x.

6.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x) - A \cos x}{\operatorname{sen} x}\right] = \frac{f'(x) \operatorname{sen} x + A \operatorname{sen}^2 x - f(x) \cos x + A \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Basta tomar $A = f'(x) \operatorname{sen} x - f(x) \cos x$, pois, pelo exercício anterior, o segundo membro desta última igualdade é constante. Com este valor de A, existirá então uma outra constante B, tal que $\frac{f(x) - A \cos x}{\operatorname{sen} x} = B$, para todo x em $]0, \pi[$. Segue que, se $f''(x) + f(x) = 0$, para todo x em $]0, \pi[$, então, existirão constantes A e B tais que, para todo x em $]0, \pi[$, $f(x) = B \operatorname{sen} x + A \cos x$.

7. Raciocine como no exercício anterior.

8. ***a***) Verifique que o primeiro membro é constante e, utilizando as condições $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$, conclua que o valor de tal constante é zero.

b) É só observar que a condição $(f(x) - \operatorname{sen} x)^2 + (g(x) - \cos x)^2 = 0$, para todo x, implica $f(x) - \operatorname{sen} x = 0$ e $g(x) - \cos x = 0$, para todo x.