CAPÍTULO 13

Exercícios 13.1

2. Temos para todo x, $\alpha - a \leqslant x \leqslant \alpha + a$,

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \beta \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}.$$

Daí,

$$V = \pi \int_{\alpha - a}^{\alpha + a} \left[\beta + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}\right]^2 dx - \pi \int_{\alpha - a}^{\alpha + a} \left[\beta - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}\right]^2 dx$$

e, portanto,

$$V = 4\beta\pi \frac{b}{a} \int_{\alpha - a}^{\alpha + a} \sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}\, dx.$$

Como $\int_{\alpha - a}^{\alpha + a} \sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}\, dx$ é a área do semicírculo de centro $(\alpha, 0)$ e raio a, resulta: $V = (\pi ab)(2\pi\beta)$ = área da elipse multiplicada pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo centro da elipse.

10. Tendo em vista a p. 435 do livro-texto,

$$x_c = \frac{\int_a^b x[g(x) - f(x)]dx}{\text{área de } A} \text{ e } y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]dx}{\text{área de } A}.$$

Multiplicando-se os numeradores e denominadores das frações por 2π, vem

$$x_c = \frac{V_y}{2\pi \times \text{área de } A} \text{ e } y_c = \frac{V_x}{2\pi \times \text{área de } A}$$

e, portanto,

$V_x = 2\pi y_c \times$ área A e $V_y = 2\pi x_c \times$ área A.