CAPÍTULO 14

Exercícios 14.5

3. A equação não admite solução constante. Separando as variáveis e observando que a condição $V_1 > 0$ para $p = p_1$ nos permite supor $V > 0$ para p próximo de p_1, resulta $\gamma \ln V = -\ln p + k$.
Tendo em vista a condição inicial $V = V_1$ para $p = p_1$, resulta $k = \ln(p_1 V_1{}^{\gamma})$. Substituindo na equação, obtemos $pV^{\gamma} = p_1 V_1{}^{\gamma}$ para todo $p > 0$.

4. Sendo $(x, f(x))$ o ponto de tangência, vem $f'(x) = \alpha f^3(x)$ ou $\dfrac{dy}{dx} = \alpha\, y^3$
onde α é o coeficiente de proporcionalidade. A função constante $y = 0$ é a única solução constante e não interessa ao problema, pois, não satisfaz a condição $f(0) = 1$. Tendo em vista esta condição, podemos supor $y > 0$. Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$y^2 = \frac{-2}{\alpha\, x + k}.$$

Para que a condição $f(0) = 1$ ($y = 1$ para $x = 0$) seja satisfeita, devemos tomar $k = -2$.
Da condição $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, vem $\alpha = -2$. Assim, $y = \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$, $x > -1$, resolve o problema.

5. Vamos tomar como sistema de coordenadas um eixo vertical, com origem no ponto em que a partícula é abandonada e com sentido positivo apontando para baixo. Pela segunda lei de Newton,

$$m\,\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v$$

sendo α a constante de proporcionalidade. Como a partícula é abandonada, sua velocidade inicial é zero, isto é, $v = 0$ para $t = 0$. Podemos supor $mg - \alpha v > 0$, pois deveremos ter $\dfrac{dv}{dt} > 0$ até a partícula tocar o solo. Separando as variáveis, integrando e lembrando que $m = 10$ e $g = 10$, vem $10 \ln(100 - \alpha\, v) = -\alpha\, t - \alpha\, k$. Da condição $v = 0$ para $t = 0$, resulta $-\alpha\, k = 10 \ln 100$. Substituindo na equação, vem

$$\ln\left(1 - \frac{\alpha v}{100}\right) = \frac{-\alpha t}{10}, \text{ ou seja, } v = \frac{100}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha t}{10}}\right),\ t \geqslant 0.$$

Tendo em vista a condição $v = 8$ para $t = 1$ a constante de proporcionalidade α deverá satisfazer a equação $\alpha = \frac{25}{2}\left(1 - e^{\frac{-\alpha}{10}}\right)$; observe que $\alpha = 0$ é uma solução que não interessa ao problema, pois devemos ter $\alpha > 0$. Um procedimento para determinar o valor (aproximado) de α que resolve o problema é o seguinte: olhando α como variável independente, consideremos as funções $y = \alpha$ e $y = \frac{25}{2}\left(1 - e^{\frac{-\alpha}{10}}\right)$; o gráfico da primeira função é uma reta com coeficiente angular 1 e passando pela origem; o gráfico da segunda função passa pela origem, y tende para $\frac{25}{2}$ quando α tende para infinito e o coeficiente angular da reta tangente na origem é $\frac{25}{20} > 1$. Logo, a reta $y = \alpha$, para α próximo da origem, estará por baixo do gráfico da outra função, o que significa que ela voltará a cruzar o gráfico da segunda função para um $\alpha < \frac{25}{2}$. Com auxílio de uma calculadora (por exemplo, HP48G) ou do EXCEL ou do MATHCAD (veja Vols. 2 e 3), obtém-se $\alpha \cong 4{,}6421275437$.

14. $u = y - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$ e, portanto, $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{du}{dx}$. Substituindo na equação, vem $\frac{du}{dx} = u^2 - 1$. Separando as variáveis, temos $\frac{du}{u^2 - 1} = dx$. Integrando, obtemos

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = x + k \text{ ou } \left|\frac{u-1}{u+1}\right| = ce^{2x} \quad \left(k = \frac{1}{2}\ln c\right).$$

Lembrando que $u = y - x$, resulta

$$\left|\frac{y - x - 1}{y - x + 1}\right| = ce^{2x}, \; c > 0,$$

que é uma família de curvas que nos fornece, de forma implícita, soluções da equação. Observe que das soluções constantes $u = 1$ e $u = -1$, resultam as soluções $y = x + 1$ e $y = x - 1$, sendo que a primeira estará incluída na família acima se permitirmos $c = 0$.