CAPÍTULO 15

Exercícios 15.1

1. Sejam a e b, com $a < b$, duas raízes consecutivas de f. Sendo f uma função polinomial, f será contínua no intervalo fechado de extremos a e b. Como $f(a) = f(b) = 0$, pelo teorema de Rolle existirá pelo menos um c em $]a, b[$, tal que $f'(c) = 0$.

2. Se houvesse duas, as raízes de f' não poderiam ser consecutivas. (Veja exercício anterior.)

4. Considere a reta que passa pela origem e intercepta o gráfico de f no ponto $(x, f(x))$. O coeficiente angular $m = m(x)$ desta reta será então dado por $m(x) = \dfrac{f(x)}{x} \cdot$ É razoável esperar que no ponto em que a reta for tangente ao gráfico de f, m deverá estar passando por um valor máximo ou mínimo local (concorda?) e, portanto, neste ponto, digamos de abscissa c, deveremos ter $m'(c) = 0$, que é equivalente a $cf'(c) - f(c) = 0$, ou seja, $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$. Para a demonstração de que isto realmente ocorre, basta aplicar o teorema de Rolle à função $m = m(x)$ dada anteriormente.

5. Basta aplicar o teorema de Rolle à função
$f(x) = a_0 x + \dfrac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \dfrac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$, no intervalo $[0, 1]$.

Exercícios 15.2

8. Pelo TVM, para todo t em $[0, 1]$ existe c em $]0, 1[$ tal que $\varphi(t) - \varphi(0) = v(c)(t - 0)$, ou seja, $\varphi(t) = v(c)t$. Se tivéssemos $v(c) < 1$ para todo c em $]0, 1[$, teríamos $\varphi(t) < t$, para todo t em $[0, 1]$ e, portanto, $\varphi(1) < 1$, ou seja, $1 < 1$, o que é impossível. Logo, existe c em $]0, 1[$ tal que $v(c) \geqslant 1$. (Suponhamos o tempo em segundos (s) e o espaço em metros (m). Este problema nos diz que, se uma partícula em 1 s percorre um espaço de 1 m, em algum instante entre 0 e 1 s a velocidade foi maior ou igual a 1.)