CAPÍTULO 2

Exercícios 2.1

12. ***a***) Sendo $a \neq 0$, podemos colocá-lo em evidência. Temos então

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$. Somando e subtraindo $\frac{b^2}{4a^2}$ na expressão dentro dos parênteses, resulta

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right].$$

De $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$ e lembrando que $\Delta = b^2 - 4ac$, obtemos

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

b) Inicialmente, observamos que, sendo $a > 0$, $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para todo x; além disso, o menor valor de $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é zero e ocorre para $x = \frac{-b}{2a}$. Segue que o menor valor de $f(x)$ é $\frac{-\Delta}{4a}$ e ocorre para $x = \frac{-b}{2a}$.

c) Sendo $a < 0$, $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ para todo x; além disso, o maior valor de $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é zero e ocorre para $x = \frac{-b}{2a}$. Segue que o maior valor de $f(x)$ é $\frac{-\Delta}{4a}$ e ocorre para $x = \frac{-b}{2a}$.

d) Como já sabemos, o gráfico de f é uma parábola; de (b) e (c) segue que $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ é o vértice da parábola.

16. ***a***) Multiplicando e dividindo $\sqrt{1+x^2} - |x|$ pelo seu conjugado $\sqrt{1+x^2} + |x|$, obtemos

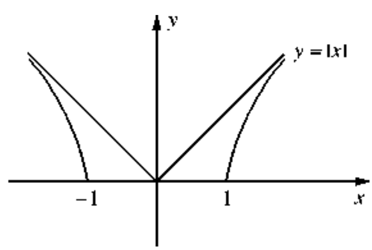
$$\sqrt{1+x^2} - |x| = \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - |x|\right)\left(\sqrt{1+x^2} + |x|\right)}{\sqrt{1+x^2} + |x|} = \frac{1}{|x| + \sqrt{1+x^2}}$$

pois $\left(\sqrt{1+x^2} - |x|\right)\left(\sqrt{1+x^2} + |x|\right) = \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 - |x|^2 = 1 + x^2 - x^2 = 1$. À medida que $|x|$ vai se tornando cada vez maior, o denominador da fração $\dfrac{1}{|x| + \sqrt{1+x^2}}$ vai se tornando cada vez maior e, portanto, o valor da fração vai se tornando cada vez mais próximo de zero. Ou seja, à medida que $|x|$ cresce, a diferença $\sqrt{1+x^2} - |x|$ vai se aproximando cada vez mais de zero. Como $\sqrt{1+x^2} \geq |x|$, isso significa que, à medida que $|x|$ cresce, o gráfico de $y = \sqrt{1+x^2}$ vai encostando por cima no gráfico de $y = |x|$. (Como será visto mais adiante, $y = |x|$ é uma *assíntota* para a função $y = \sqrt{1+x^2}$.)

17. Observe que $|x| \geq \sqrt{x^2 - 1}$ e $|x| - \sqrt{x^2 - 1} = \dfrac{1}{|x| + \sqrt{x^2 - 1}}$. Raciocinando como no Exercício 16, conclui-se que à medida que $|x|$ cresce, o gráfico de $y = \sqrt{x^2 - 1}$ vai encostando por baixo no gráfico de $y = |x|$.

$D(f) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Esboço do Gráfico



24. A distância d de $(0, 0)$ a (x, y) é $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Lembrando que $y = \dfrac{1}{x}$ resulta: $d = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{x^4 + 1}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{|x|}$.

25. O tempo T_1 gasto de $(0, 0)$ a $(x, 10)$ é a distância percorrida $\sqrt{(x-0)^2 + (10-0)^2}$ dividida pela velocidade de 1 m/s: $T_1 = \dfrac{\sqrt{x^2+100}}{1} = \sqrt{x^2 + 100}$; o tempo T_2 gasto de $(x, 10)$ a $(30, 10)$ é $T_2 = \dfrac{\sqrt{(x-30)^2 + (10-10)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{(x-30)^2}}{2} = \dfrac{|x-30|}{2}$. Portanto, o tempo $T(x)$ gasto no percurso é dado por $T(x) = \sqrt{x^2 + 100} + \dfrac{|x-30|}{2}$. (Observe que para valor de x tem-se um percurso: para $x = 0$, o percurso será de (0, 0) a (0, 10) e, em seguida, de (0, 10) a (30, 10); para $x = 60$, o percurso será de (0, 0) a (60, 10) e, em seguida, de (60, 10) a (30, 10) etc.)

26. $\sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = 4$ que é equivalente a $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Elevando ao quadrado os dois membros, obtemos

$(x+1)^2 + y^2 = 16 - 8\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + (x-1)^2 + y^2$.

Desenvolvendo e simplificando o que der para simplificar, vem $4 - x = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Elevando novamente os dois membros ao quadrado, temos $16 - 8x + x^2 = 4[(x-1)^2 + y^2]$.

Assim, $3x^2 + 4y^2 = 12$ e, portanto, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ que é uma *elipse de focos* $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. (Veja Exercício 27.)

27. ***a)*** $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2k$ que é equivalente a $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2k - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Elevando ao quadrado os dois membros e simplificando, obtemos

$k^2 - cx = k\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

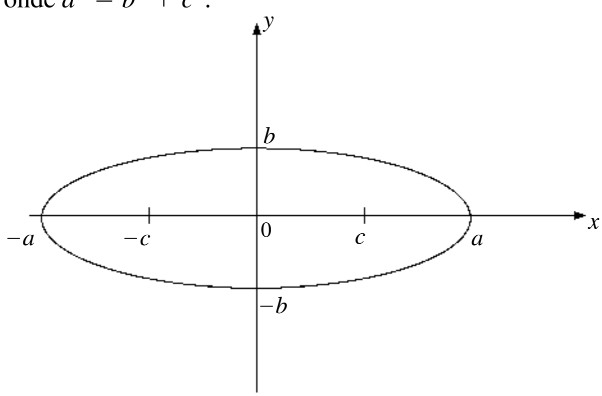
Elevando novamente os dois membros ao quadrado e simplificando, vem

$(k^2)^2 - k^2c^2 = (k^2 - c^2)x^2 + k^2y$, ou seja, $k^2(k^2 - c^2) = (k^2 - c^2)x^2 + k^2y^2$.

Fazendo $k = a$, $b^2 = k^2 - c^2$, $b > 0$, e dividindo os dois membros da última equação por a^2b^2, resulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a equação da elipse de focos $(-c, 0)$, $(c, 0)$, semi-eixo maior a $(a = k)$ e semi-eixo menor b, $b > 0$, onde $a^2 = b^2 + c^2$.



31. A equação da reta r é $y - 2 = m(x - 1)$. Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$ os pontos em que r intercepta, respectivamente, os eixos x e y. A distância de A a B é $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ que deverá ser expressa em função do coeficiente angular m. Vamos então expressar a e b em função de m. Devemos ter $b - 2 = m(0 - 1)$ e $0 - 2 = m(a - 1)$.

Segue que $b = 2 - m$ e $a = \frac{m-2}{m}$. Daí, $d = \sqrt{\left(\frac{m-2}{m}\right)^2 + (m-2)^2} =$

$= \sqrt{\frac{(m-2)^2\,(m^2+1)}{m^2}}$, ou seja, $d = \frac{|m-2|}{|m|}\sqrt{m^2+1}$. Lembrando da condição $m < 0$, temos $d = \frac{m-2}{m}\sqrt{m^2+1}$.

34. Sendo x e y os lados do retângulo, $A = xy$. A diagonal do retângulo é igual ao diâmetro da circunferência, então, pelo teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = (2r)^2$ e daí $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$. Segue que $A = x\sqrt{4r^2 - x^2}$.

35. Sendo R o raio da base e h a altura do cilindro, $V = \pi R^2 h$. A seção do cilindro por um plano passando pelo centro da base do cilindro e pelo centro da esfera é um retângulo de altura h e base $2R$. A diagonal desse retângulo é o diâmetro da esfera que é $2r$; pelo teorema de Pitágoras, $(2R)^2 + h^2 = (2r)^2$ e, portanto, $R^2 = \frac{4r^2 - h^2}{4} = r^2 - \frac{h^2}{4}$. Segue, $V = \pi\left(hr^2 - \frac{h^3}{4}\right)$.

37. Sendo x e y os lados do retângulo, $x + y = p$ e, portanto, a área do retângulo, em função de x, é $A = x(p - x) = -x^2 + px$. Como sabemos, o gráfico de $A = -x^2 + px$ é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e, deste modo, o valor máximo de A ocorrerá para $x = \frac{-b}{2a} = \frac{p}{2}$. Da condição $x + y = p$, resulta $y = \frac{p}{2}$. Logo, o retângulo de maior área entre todos os retângulos de perímetro $2p$ é o quadrado de lado $\frac{p}{2}$.