CAPÍTULO 3

Exercícios 3.2

3. Seja p um real dado. Precisamos provar que dado $\varepsilon > 0$, existe um intervalo aberto I contendo p tal que, para todo x, $x \in I \Rightarrow p^n - \varepsilon < x^n < p^n + \varepsilon$.

1.º Caso. n ímpar.
Sendo n ímpar, temos:

$$p^n - \varepsilon < x^n < p^n + \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{p^n - \varepsilon} < x < \sqrt[n]{p^n + \varepsilon}.$$

Tomando-se $I = \left]\sqrt[n]{p^n - \varepsilon}, \sqrt[n]{p^n + \varepsilon}\right[$, tem-se, para todo x, $x \in I \Rightarrow p^n - \varepsilon < x^n < p^n + \varepsilon$.
Logo, $f(x) = x^n$ é contínua em todo p real, ou seja, f é uma função contínua.

2.º Caso. n par.
Analisemos inicialmente o caso $p = 0$. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, temos

$$0^n - \varepsilon < x^n < 0^n + \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt[n]{\varepsilon} \Leftrightarrow -\sqrt[n]{\varepsilon} < x < \sqrt[n]{\varepsilon}.$$

Tomando-se, então, $I = \left]-\sqrt[n]{\varepsilon}, \sqrt[n]{\varepsilon}\right[$ tem-se $x \in I \Rightarrow 0^n - \varepsilon < x^n < 0^n + \varepsilon$.
Logo, $f(x) = x^n$ é contínua em $p = 0$.
Suponhamos, agora, $p \neq 0$. Para todo $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon < p^n$, temos

$$p^n - \varepsilon < x^n < p^n + \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{p^n - \varepsilon} < |x| < \sqrt[n]{p^n + \varepsilon}.$$

Se $p > 0$, tomando-se $I = \left]\sqrt[n]{p^n - \varepsilon}, \sqrt[n]{p^n + \varepsilon}\right[$, tem-se $x \in I \Rightarrow p^n - \varepsilon < x^n < p^n + \varepsilon$.

Se $p < 0$, tomando-se $I = \left]-\sqrt[n]{p^n + \varepsilon}, -\sqrt[n]{p^n - \varepsilon}\right[$, tem-se $x \in I \Rightarrow p^n - \varepsilon < x^n < p^n + \varepsilon$.
Logo, $f(x) = x^n$ é contínua em todo $p \neq 0$.

4. 1.º Caso. n ímpar.
Para todo $\varepsilon > 0$ dado, tem-se

$$\sqrt[n]{p} - \varepsilon < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{p} + \varepsilon \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{p} - \varepsilon\right)^n < x < \left(\sqrt[n]{p} + \varepsilon\right)^n.$$

Tomando-se $I = \left]\left(\sqrt[n]{p} - \varepsilon\right)^n, \left(\sqrt[n]{p} + \varepsilon\right)^n\right[$ tem-se

$$x \in I \Rightarrow \sqrt[n]{p} - \varepsilon < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{p} + \varepsilon.$$

2.º Caso. n par.

Neste caso a função $f(x) = \sqrt[n]{x}$ está definida apenas para $x \geqslant 0$. Para todo $\varepsilon > 0$,
$0 \leqslant x < \varepsilon^n \Rightarrow \sqrt[n]{x} < \varepsilon.$

Logo, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua em $p = 0$. Suponhamos, agora, $p > 0$; para todo $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon < \sqrt[n]{p}$, tem-se

$$\sqrt[n]{p} - \varepsilon < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{p} + \varepsilon \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{p} - \varepsilon\right)^n < x < \left(\sqrt[n]{p} + \varepsilon\right)^n.$$

Tomando-se $I = \left]\left(\sqrt[n]{p - \varepsilon}\right)^n, \left(\sqrt[n]{p} + \varepsilon\right)^n\right[$, tem-se

$x \in I \Leftrightarrow \sqrt[n]{p} - \varepsilon < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{p} + \varepsilon.$

Logo, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua em todo $p > 0$.

7. Função maior inteiro (veja Exercício 9).

10. $f(x) = x(x^2 - 1)$ se x for racional e $f(x) = -x(x^2 - 1)$ se x for irracional.

16. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, tomando-se $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ tem-se
$|x - 1| < \delta \Rightarrow (x - 1)^2 < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon.$
Logo, f é contínua em $p = 1$.

19. Sendo g contínua em p, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo x no domínio de g,

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(p)| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow M|g(x) - g(p)| < \varepsilon.$$

Tendo em vista a hipótese $|f(x) - f(p)| \leqslant M|g(x) - g(p)|$ para todo x real, resulta
$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$
Logo, f é contínua em p.

20. Suponhamos, por absurdo, que exista p real tal que $f(p) \neq 0$. Pelo teorema da conservação do sinal, existirá $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ para $p - \delta < x < p + \delta$, o que é impossível, pois, entre $p - \delta$ e $p + \delta$ existe pelo menos um racional.

22. É só observar que $f(x) = g(x)$ em todo x racional e aplicar o Exercício 21.

Exercícios 3.3

10. Da hipótese, segue que, tomando-se $\varepsilon = 1$, existe $r > 0$ tal que, para todo x no domínio de f, $0 < |x - p| < r \Rightarrow |f(x) - f(p)| < 1$.
Lembrando que $|f(x) - f(p)| \geq |f(x)| - |f(p)|$ resulta $0 < |x - p| < r \Rightarrow |f(x)| - |f(p)| < 1$.
Agora, é só tomar $M = 1 + |f(p)|$.

12.

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } \forall\ x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } \forall\ x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \big||f(x) - L| - 0\big| < \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \to p} |f(x) - L| = 0$$

13. Pelo Exercício 11, com $L = 0$, $\lim\limits_{x \to p} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to p} |f(x)| = 0.$ Segue que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{x - p} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to p} \frac{|f(x)|}{|x - p|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to p} \frac{f(x)}{|x - p|} = 0.$$

15. Suponhamos que exista p real tal que $f(p) < 0$. Pelo teorema da conservação do sinal existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para $p - \delta < x < p + \delta$, o que é impossível, pois existe pelo menos um racional entre $p - \delta$ e $p + \delta$. Logo, $f(x) \geq 0$ para todo x.

Exercícios 3.4

3. Não, pois, f não está definida em $p = 1$.

4. $f(x) = x$ para $x \neq 2$ e $f(2) = 5$.

5. Suponhamos, por absurdo, que $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = L$ com $L < 0$. Tomando-se $\varepsilon = -L$, existe

$r_1 > 0$, com $r_1 < r$, tal que $L - (-L) < f(x) < L + (-L)$ para $p < x < p + r_1$, ou seja, $2L < f(x) < 0$ para $p < x < p + r_1$, que contraria a hipótese $f(x) \geq 0$ para $p < x < p + r$.

6. Suponhamos $x \in I$. Para $x > p$, $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$; para $x < p$, $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$.

Segue que

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leqslant 0 \text{ e } \lim_{x \to p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geqslant 0.$$

Daí, $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} = 0.$

Exercícios 3.5

2. ***a)*** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(3x)}{x} = 3 \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(3x)}{3x}$. Pela mudança de variável $u = 3x$, $u \to 0$ para $x \to 0$,

resulta $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(3x)}{3x} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(u)}{u} = 1$. Logo, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(3x)}{x} = 3.$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} x \frac{f(x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{f(x^2)}{x^2}$ desde que o segundo limite exista.
Pela mudança de variável $u = x^2$, $u \to 0$ para $x \to 0$, tem-se

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = \lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u} = 1$. Como $\lim_{x \to 0} x = 0$, resulta $\lim_{x \to 0} \frac{f(x^2)}{x} = 0$.

3. ***a***) Pela mudança de variável $h = x - p$, $x \to p$ para $h \to 0$, vem

$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L.$

b) Fazendo $u = 3h$, $u \to 0$ para $h \to 0$, vem

$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+3h) - f(p)}{h} = 3 \lim_{u \to 0} \frac{f(p+u) - f(p)}{u} = 3L.$

c) $\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p-h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(p-h) - f(p)}{h}.$

Com a mudança de variável $u = -h$, $u \to 0$ para $h \to 0$, resulta

$\lim_{h \to 0} \frac{f(p-h) - f(p)}{h} = -\lim_{u \to 0} \frac{f(p+u) - f(p)}{u} = -L.$

Segue que $\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p-h)}{h} = 2L.$

Exercícios 3.6

1. Como

$\lim_{x \to 1} (-x^2 + 3x) = 2$ e $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$

pelo teorema do confronto, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

2. Pela hipótese, $-2|x - 1| + 3 \leqslant f(x) \leqslant 2|x - 1| + 3$.
De $\lim_{x \to 1} [-2|x - 1| + 3] = \lim_{x \to 1} [2|x - 1| + 3] = 3$, pelo teorema do confronto, $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

3. Da hipótese, segue que, para $x \neq 0$, $0 \leqslant \left| \frac{g(x)}{x} \right| \leqslant |x^3|$. Como $\lim_{x \to 0} |x^3| = 0$, pelo teorema do confronto, $\lim_{x \to 0} \left| \frac{g(x)}{x} \right| = 0$ e, portanto, $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 0$.

4. ***a***) Para todo $\delta > 0$ existe um natural k tal que $\dfrac{1}{k\pi} < \delta$ e $\dfrac{2}{(2k+1)\pi} < \delta$. Temos

$\operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$ para $x = \dfrac{1}{k\pi}$ e $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 1$ para $x = \dfrac{2}{(2k+1)\pi}$.

Segue que para todo L é falsa a afirmação: existe $\delta > 0$ tal que para todo x

$0 < |x| < \delta \Rightarrow L - \dfrac{1}{4} < \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} < L + \dfrac{1}{4}$.

Logo, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ não existe.

b) Para $x \neq 0$, $\left|\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$; logo, $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ é limitada. Como $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ segue que

$\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$.

6. Da hipótese $[g(x)]^4 + [f(x)]^4 = 4$ segue que, para todo x, $|g(x)| \leqslant \sqrt[4]{4}$ e $|f(x)| \leqslant \sqrt[4]{4}$.

Logo, f e g são limitadas. Como $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$ e $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{x^2 - 9} = 0$, resulta:

a) $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \, g(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)\sqrt[3]{x^2 - 9} = 0$.

Exercícios 3.8

2. ***a***) Sabemos que para $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ temos $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ e, portanto,

$\cos x - 1 < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 < 0$.

b) De (***a***) segue, para $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ tem-se $0 < 1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 - \cos x$. Temos

$\dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \dfrac{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{x}$.

Segue que

$$0 < \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{x} < \frac{1 - \cos x}{x} \text{ para } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

e

$$\frac{1-\cos x}{x} < \frac{1-\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{x} < 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = 0$, pelo teorema do confronto, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} = 0$.