Capítulo 4

Exercícios 4.1

3.

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}}{2 - \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}} = \dfrac{1}{2}$

b) Pela definição de limite, tomando-se $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ existe $r > 0$ tal que

$x > r \Rightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} < \dfrac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}.$

5. Pela definição de limite, tomando-se $\varepsilon = \dfrac{L}{2}$ existe $r > 0$, com $r > a$, tal que

$x > r \Rightarrow L - \dfrac{L}{2} < \dfrac{f(x)}{g(x)} < L + \dfrac{L}{2}.$

Da hipótese $g(x) > 0$ para $x > a$ resulta $x > r \Rightarrow \dfrac{L}{2}\, g(x) < f(x) < \dfrac{3L}{2}\, g(x).$

Pelo teorema do confronto, conclui-se que, se $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

Exercícios 4.2

5. $f(x) = 1$ e $g(x) = x$ se x for racional e $g(x) = -x$ se x for irracional.

6. $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x.$

7. $f(x) = 2x$ e $g(x) = x.$

8. Sendo $a > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right) = +\infty \cdot a = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} \right) = -\infty \cdot a = -\infty.$$

Segue, da definição de limite, que tomando-se $m > 0$, existem $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que $x > r_1 \Rightarrow f(x) > m$ e $x < -r_2 \Rightarrow f(x) < -m$.
Tomando-se $x_1 < -r_2$ e $x_2 > r_1$, teremos $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$.

9. Tomando-se $\varepsilon = 1$, existe $r > 0$, com $r > a$, tal que $x > r \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} > 1$.
Da hipótese $g(x) > 0$ para $x > a$, segue que $x > r \Rightarrow f(x) > g(x)$.

Exercícios 4.3

3. A prova que será apresentada a seguir se deve a Nicole Oresme (1323?-1382) (veja p. 194 do livro *História da Matemática* de Carl B. Boyer). Temos

$$1 > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} > \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

Como a soma dos segundos membros destas desigualdades tende a infinito, segue que a soma dos primeiros membros também tenderá a infinito.

4.

$$S_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n) = \frac{1}{n^2} \frac{(n+1)n}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

a) $S_3 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{3}\right).$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$ que é a área do triângulo de vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 1).

6. Veja Cap. 17.

7. ***a***) De

$$\frac{aT}{n} \cdot \frac{T}{n} + \frac{2aT}{n} \cdot \frac{T}{n} + \dots + \frac{(n-1)aT}{n} \cdot \frac{T}{n} = \frac{aT^2}{n^2}[1 + 2 + \dots + (n-1)] = \frac{aT^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

segue que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{aT}{n}\cdot\frac{T}{n}+\frac{2aT}{n}\cdot\frac{T}{n}+...+\frac{(n-1)aT}{n}\cdot\frac{T}{n}\right]=\frac{aT^2}{2}$$

b) Marcando no eixo vertical a velocidade e no horizontal o tempo, o limite em (***a***) é o espaço percorrido pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = T$, que numericamente é igual à área do triângulo limitado pelas retas $v = at$, $t = T$ e pelo eixo Ot.

8. Veja Apêndice A1.4.

9. ***b***)

$$1 \leqslant \frac{1}{2^0}$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2} \leqslant \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2} \leqslant \frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{(2^n)^2}+\frac{1}{(2^n+1)^2}+...+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^2} \leqslant \frac{2^n}{(2^n)^2}=\frac{1}{2^n}$$

$$\vdots$$

A soma dos segundos membros, que é uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão $\frac{1}{2}$, é $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}+...=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

Logo, para todo natural $n \geqslant 1$, tem-se $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2$.

c) Observe o Exercício 8.

Exercícios 4.4

2. Como, por hipótese, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, segue que temos também $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

Como, para todo natural n, $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$, resulta $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)$ e, portanto, $a=\frac{1}{1+a}$. Segue que $a^2+a-1=0$. Assim, $a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Da hipótese $a_n>0$ para todo n, resulta $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

4. $a_2=\sqrt{2a_1}$; $a_3=\sqrt{2a_2}$ e, de modo geral, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$. Supondo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, segue que $a=\sqrt{2a}$ e, portanto, $a = 0$ ou $a = 2$. Como a seqüência é crescente e o primeiro termo é $\sqrt{2}$ tem-se $a = 2$.

5. Basta observar que $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

6. $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{sen} \dfrac{1}{\dfrac{1}{n\pi}} = \lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{sen}(n\pi) = 0$ e

$\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{sen} \dfrac{1}{\dfrac{2}{(2n+1)\pi}} = \lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{sen} \dfrac{(2n+1)\pi}{2} = 1$. Logo, o limite $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ não existe.