CAPÍTULO 5

Exercícios

4. Seja $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{1+x^4}$. Temos $f(-3) < 0$ e $f(3) > 0$. Como f é contínua, pelo teorema do anulamento, existe c entre -3 e 3 tal que $f(c) = 0$. Logo, a equação dada admite pelo menos uma raiz real.

6. ***a)*** $f(1) = 1$; para $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 + x \leqslant x^2 + 1$ e, portanto, $f(x) = \dfrac{x^2+x}{1+x^2} \leqslant 1$. Como $f(x) < 0$ para $-1 < x < 0$ resulta $f(x) \leqslant 1$ para $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Logo, $f(1)$ é o valor máximo de f.
c) Como f é contínua em $[-1, 1]$, pelo teorema de Weirstrass f assume valor mínimo em $[-1, 1]$ e este valor mínimo deverá ser assumido em $[-1, 0]$, pois $f(x) \geqslant 0$ em $[0, 1]$ e $f(x) < 0$ em $]-1, 0[$. Como $f(-1) = f(0) = 0$, segue que o valor mínimo deverá ser assumido em $]-1, 0[$, ou seja, existe $c \in\,]-1, 0[$ tal que $f(c)$ é o valor mínimo de f em $[-1, 1]$.

8. Sendo f contínua em $[a, b]$, pelo teorema de Weirstrass existem x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que, para todo x em $[a, b]$, $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$. Como f é não-constante em $[a, b]$, $f(x_1) < f(x_2)$. Sendo γ um real tal que $f(x_1) < \gamma < f(x_2)$, pelo teorema do valor intermediário existirá pelo menos um real c em $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$. Fazendo, então, $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$, teremos $\operatorname{Im} f = [m, M]$.

10. Como f é contínua em $[0, 1]$, supondo f não-constante em $[0, 1]$, pelo Exercício 8 $\operatorname{Im} f = [m, M]$, com $m < M$, o que é impossível, pois neste intervalo existe pelo menos um número irracional e, por hipótese, $f(x)$ é racional para todo x em $[0, 1]$. Então, f é constante e como $f(0) = 1$, teremos $f(x) = 1$ para todo x em $[0, 1]$.

13. Suponhamos por absurdo que exista $s \in I$, com $s > a$, tal que $f(s) < 0$. Pela hipótese, existe $x_0 \in$ I, com $x_0 > a$, tal que $f(x_0) > 0$. Da continuidade de f em I e, portanto, no intervalo de extremos x_0 e s, pelo teorema do anulamento, existirá c entre x_0 e s tal que $f(c) = 0$, o que não poderá ocorrer, pois, pela hipótese, $f(x) = 0$ apenas para $x = a$ e $c > a$. Logo, $f(x) > 0$ para todo $x > a$, com $x \in I$.

15. Sugestão. Raciocine como no Exercício 13.