CAPÍTULO 7

Exercícios 7.2

18. $f(x) = |x^3 - x|$

19. $f(x) = |\operatorname{sen} \pi x|$

Exercícios 7.3

8. $f'(p) = \dfrac{-1}{p^2}$. Segue que a reta tangente no ponto de abscissa p é $y - \dfrac{1}{p} = \dfrac{-1}{p^2}(x - p)$.

Para $y = 0$, $x - p = \dfrac{p^2}{p}$ e, portanto, $x = 2p$; ou seja, a reta tangente no ponto de abscissa p intercepta o eixo $0x$ no ponto de abscissa $x = 2p$.

Exercícios 7.6

1. ***a***) Não, pois $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x+1) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 1 = 1$.

b) Não, pois f não é contínua em 2.

2. ***a***) Sim, pois $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-x^2}{x} = 0$

e, portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

b) Sim, pois f é derivável em 0.

3. ***a***) Não, pois $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x+3}{x-3} = -1$ e

$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-3}{x-3} = 1$.

b) Sim, pois $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (-x+3) = 0$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-3) = 0$ e, portanto,

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0 = f(3)$.

Exercícios 7.9

6. $y=\dfrac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2}{x^3}$. Substituindo na equação, tem-se $x\left(\dfrac{-2}{x^3}\right)+2\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ para $x \neq 0$.

Logo, $y=\dfrac{1}{x^2}$ satisfaz a equação dada.

7. $y=\dfrac{-2}{x^2+k}$ e $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x}{\left(x^2+k\right)^2}\cdot$ Substituindo na equação, resulta

$$\frac{4x}{\left(x^2+k\right)^2}-x\left(\frac{-2}{x^2+k}\right)^2=\frac{4x}{\left(x^2+k\right)^2}-\frac{4x}{\left(x^2+k\right)^2}=0 \text{ para todo } x.$$

Logo, $y=\dfrac{-2}{x^2+k}$ satisfaz a equação dada.

9. $x\dfrac{d^2}{dx^2}\left(x^2-3x\right)-\dfrac{d}{dx}\left(x^2-3x\right)=2x-(2x-3)=3$ para todo x. Logo, $y=x^2-3x$ satisfaz a equação dada.

11. $\dfrac{d^2}{dt^2}(\cos t)+\cos t=-\cos t+\cos t=0$. Logo, $x=\cos t$ satisfaz a equação dada.

13. $\dfrac{d^2}{dt^2}\left(te^t\right)-2\dfrac{d}{dt}\left(te^t\right)+te^t=\left(2e^t+te^t\right)-2\left(e^t+te^t\right)+te^t=0$. Logo, $y=te^t$ satisfaz a equação dada.

15. $\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{d^2}{dt^2}\left(x^2\right)=\dfrac{d}{dt}\left(2x\dfrac{dx}{dt}\right)=2\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dx}{dt}+2x\dfrac{d^2x}{dt^2}=2\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+2x\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Exercícios 7.11

2. $g'(t)=f'\left(t^2+1\right)\left(t^2+1\right)'=2t\,f'\left(t^2+1\right)$. Daí, $g'(1)=2f'(2)=10$.

9. $g(x)=f\left(e^{2x}\right) \quad \Rightarrow \quad g'(x)=f'\left(e^{2x}\right)e^{2x}2 \quad \Rightarrow$
$g''(x)=f''\left(e^{2x}\right)\left(e^{2x}2\right)\left(e^{2x}2\right)+f'\left(e^{2x}\right)e^{2x}4$

ou seja,

$$g''(x) = 4e^{4x} f''\left(e^{2x}\right) + 4e^{2x} f'\left(e^{2x}\right) = 4e^{2x}\left[f'\left(e^{2x}\right) + e^{2x} f''\left(e^{2x}\right) \right].$$

12. $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(e^{\alpha x}\right) - 4e^{\alpha x} = \alpha^2 e^{\alpha x} - 4e^{\alpha x} = e^{\alpha x}\left(\alpha^2 - 4\right) = 0.$ Como $e^{\alpha x} \neq 0$ para todos os reais α e x, deveremos ter então $\alpha^2 - 4 = 0$, ou seja, $\alpha = \pm 2$.

14. $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(e^{\alpha x}\right) + a\dfrac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}\right) + be^{\alpha x} = \alpha^2 e^{\alpha x} + a\alpha e^{\alpha x} + be^{\alpha x} = e^{\alpha x}\left[\alpha^2 + a\alpha + b\right] = 0,$ pois, por hipótese, α é raiz da *equação característica* $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

21. $y = \sqrt{x^2 + 1} \;\; \Rightarrow y^2 = x^2 + 1.$ Derivando em relação a x, vem
$\dfrac{d}{dx}\left(y^2\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^2 + 1\right)$ e, portanto, $2y\dfrac{dy}{dx} = 2x.$

Derivando novamente em relação a x, resulta

$$\frac{d}{dx}\left(2y\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(2x), \text{ ou seja, } 2\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx} + 2y\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

e, portanto, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1.$

22. Para todo x em I, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right)$; daí, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2x + \dfrac{d}{dx}\left(y^2\right).$
De $\dfrac{d}{dx}\left(y^2\right) = 2y\dfrac{dy}{dx}$ e tendo em vista que $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, resulta
$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2x + 2y\left(x^2 + y^2\right)$, ou seja,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 2x^2y + 2y^3.$$

23. ***a***) Sendo f derivável em I, $x + [f(x)]^3$ será, também, derivável em I; logo, $f'(x)$ é derivável em I, ou seja, $f''(x)$ existe para todo x em I.

b) $f''(x) = 1 + 3\left[f(x)\right]^2 f'(x)$, daí, $f''(1) = 1 + 3\left[f(1)\right]^2 f'(1)$. De $f(1) = 1$ e $f'(1) = 1 + \left[f(1)\right]^3$, resulta $f''(1) = 7$.

c) $y - f(1) = f'(1)\,(x - 1)$, ou seja, $y - 1 = 2\,(x - 1)$.

26. De $y = \frac{4}{x}$ segue que $\frac{dy}{dt} = \frac{-4}{x^2}\frac{dx}{dt}$ e, portanto, $\frac{dy}{dt} = \frac{-4\beta}{x^2}$, pois $\frac{dx}{dt} = \beta$. Derivando novamente em relação a t e lembrando que β é constante, obtemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{4\beta}{x^4}\frac{d}{dt}\left(x^2\right) = \frac{4\beta}{x^4}\left(2x\frac{dx}{dt}\right) = \frac{8\,\beta^2}{x^3}.$$

29. ***a***) Sendo f ímpar, para todo x em $]-r, r[$ temos $f(-x) = -f(x)$; daí,
$[f(-x)]' = -f'(x)$. Como $[f(-x)]' = f'(-x)\,(-x)' = -f'(-x)$, resulta
$f'(-x) = f'(x)$ para todo x em $]-r, r[$. Logo, f' é uma função par em $]-r, r[$.

Exercícios 7.13.

2. Isolando y na equação $xy^2 + y + x - 1 = 0$, resulta $y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4x(x-1)}}{2x}$. Assim,

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-4x^2 + 4x + 1}}{2x}, \quad \frac{1-\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2} \ \text{ e } \ x \neq 0,$$

ou

$$y = \frac{-1 - \sqrt{-4x^2 + 4x + 1}}{2x}, \quad \frac{1-\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2} \ \text{ e } \ x \neq 0,$$ são funções dadas implicitamente pela equação dada.

5. Primeiro vamos determinar o valor de y correspondente a $x = 1$. Substituindo x por 1 na equação, obtemos $y^2 = \frac{1}{4}$ e, portanto, $y = \frac{1}{2}$ (lembre-se da condição $y > 0$). Vamos, agora, calcular $\frac{dy}{dx}$ para $x = 1$. Derivando implicitamente, vem

$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$ e, portanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$.

Como para $x = 1$ temos $y = \frac{1}{2}$, resulta $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{-1}{2}$. A equação da reta tangente no ponto de abscissa 1 é $y - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}(x-1)$, ou seja, $y = \frac{-x}{2} + 1$.

6. Derivando implicitamente, obtemos $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$. Segue que o coeficiente angular m da reta tangente no ponto $(x_0,\ y_0)$ é $m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. A equação da reta tangente no ponto (x_0, y_0) é $y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$, ou seja, $\frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$.

Como $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, resulta $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$. Assim, a equação da reta tangente pedida é

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

7. Derivando implicitamente a equação $xy = 1$, obtemos $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. A equação da reta tangente no ponto (x_0, y_0) é, então, $y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$. De $x_0 y_0 = 1$, resulta $y_0 x + x_0 y = 2$ que é a equação da reta tangente à curva $xy = 1$, no ponto (x_0, y_0). Sendo A a interseção dessa reta com o eixo x, temos $A = \left(\frac{2}{y_0},\ 0\right)$, pois, fazendo $y = 0$ na equação da reta tangente, resulta $x = \frac{2}{y_0}$. Por outro lado, a interseção da reta tangente com o eixo y é $B = \left(0,\ \frac{2}{x_0}\right)$. O ponto médio do segmento AB é, então, $\left(\frac{1}{y_0},\ \frac{1}{x_0}\right)$; porém, de $x_0 y_0 = 1$ resulta $x_0 = \frac{1}{y_0}$ e $y_0 = \frac{1}{x_0}$. Assim, (x_0, y_0) é o ponto médio do segmento AB.

9. Derivando implicitamente a equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, obtemos $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$. Segue que $y - y_0 = -\frac{y_0^{1/3}}{x_0^{1/3}}(x - x_0)$, ou seja, $\frac{x}{x_0^{1/3}} + \frac{y}{y_0^{1/3}} = x_0^{2/3} + y_0^{2/3}$.
De $x_0^{2/3} + y_0^{2/3} = 1$, resulta que $\frac{x}{x_0^{1/3}} + \frac{y}{y_0^{1/3}} = 1$ é a equação da reta tangente no ponto (x_0, y_0). Segue que $A = \left(x_0^{1/3},\ 0\right)$ e $B = \left(0,\ y_0^{1/3}\right)$. A distância de A a B é $\sqrt{\left(x_0^{1/3} - 0\right)^2 + \left(y_0^{1/3} - 0\right)^2} = 1$. Assim, a distância de A a B é 1, qualquer que seja (x_0, y_0), com $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$; logo, a distância de A a B não depende do ponto (x_0, y_0).

10. Derivando implicitamente a equação $xy - x^2 = 1$, obtemos $y + x\frac{dy}{dx} - 2x = 0$ e, portanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x}$. Segue que $y - y_0 = \frac{2x_0 - y_0}{x_0}(x - x_0)$ é a equação da reta tangente no ponto (x_0, y_0). A interseção desta reta com o eixo $0y$ é $B = (0,\ 2y_0 - 2x_0)$. A área do triângulo de vértices $(0, 0)$, B e (x_0, y_0) é $\frac{1}{2}x_0(2y_0 - 2x_0) = x_0 y_0 - x_0^2 = 1$. Logo, a área do triângulo de vértices $(0, 0)$, B e (x_0, y_0) independe do ponto (x_0, y_0), $x_0 > 0$.

Exercícios 7.15

11. $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3x^2 - 2x\right)$ e, portanto, $\frac{dy}{dt} = 6x\frac{dx}{dt} - 2\frac{dx}{dt}$. Das condições $\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dx}{dt} \neq 0$, resulta $3 = 6x - 2$, ou seja, $x = \frac{5}{6}$. O ponto pedido é aquele cuja abscissa é $\frac{5}{6}$.

13. Derivando em relação a t os dois membros da equação $xy = 4$, obtemos $y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} = 0$ e, portanto, $y\frac{dx}{dt} + \beta x = 0$, com β constante. Derivando a última

equação em relação a t, vem $\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt}+y\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}=0$ e, então, $y\frac{d^2x}{dt^2}=-2\,\beta\frac{dx}{dt}$.
Tendo em vista que $y=\frac{4}{x}$ e $\frac{dx}{dt}=\frac{-\beta x}{y}$, resulta $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\beta^2}{8}x^3$.

17. Pela lei dos co-senos, $5^2=3^2+x^2-6\,x\cos\theta$. Derivando em relação a t, obtemos
$0=2x\frac{dx}{dt}-6\frac{dx}{dt}\cos\theta+6x\text{ sen }\theta\frac{d\theta}{dt}$.

Para $\theta=\frac{\pi}{2}$, temos $x=4$. Substituindo estes valores na equação anterior e lembrando que $\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}$, obtemos $\frac{dx}{dt}=-\frac{3}{2}$ (cm/s).

19. Suponhamos que para $\theta=0$, a abscissa de P seja m. Sendo O o centro da circunferência, quando o segmento OP descreve um ângulo de θ rad, $\theta>0$, o ponto de tangência da circunferência com o eixo x avança θ m, isto porque a rolagem é sem escorregamento e o raio da circunferência unitário. Segue que $1-y=\cos\theta$ e $x=m+\theta-\text{sen }\theta$.
Temos, então, $\frac{dy}{dt}=\text{ sen }\theta\frac{d\theta}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}=\frac{d\theta}{dt}-\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$. Como $\frac{d\theta}{dt}=1$, resulta $\frac{dy}{dt}=\text{sen}\,\theta$ e $\frac{dx}{dt}=1-\cos\theta$. (Observe que, se $\theta=0$ para $t=0$, teremos $\theta=t$ e, portanto, $x=t-\text{sen }t$ e $y=1-\cos t$, que são as equações paramétricas da curva denominada *ciclóide*.)

21. $h-y+\sqrt{h^2+x^2}=e$; derivando em relação a t, obtemos $\frac{dy}{dt}=\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}\frac{dx}{dt}$.

Exercícios 7.16

14. Seja p a abscissa do ponto de tangência. Devemos ter

$$\begin{cases}\beta p-2=p^3-4p\\ \beta=3p^2-4.\end{cases}$$

Segue que $3p^3-4p-2=p^3-4p$ e, portanto, $p^3=1$. Logo, $\beta=-1$.

15. Seja $y=mx+n$ a equação da reta tangente; sejam p e q as abscissas dos pontos de tangência com as curvas $y=-x^2$ e $y=\frac{1}{2}+x^2$, respectivamente. Temos

$$\begin{cases}mp+n=-p^2\\ mq+n=\frac{1}{2}+q^2\\ m=-2p\\ m=2q.\end{cases}$$

Das duas últimas equações, resulta $q = -p$. Substituindo na segunda equação e somando-a com a primeira, obtemos $n = \dfrac{1}{4}$. Fazendo na primeira equação $n = \dfrac{1}{4}$ e $m = -2p$, tem-se $p^2 = \dfrac{1}{4}$ e, portanto, $p = \pm\dfrac{1}{2}$. Segue que $m = \pm 1$. Logo a equação de r é $y = -x + \dfrac{1}{4}$ ou $y = x + \dfrac{1}{4}$.

Exercícios 7.17

7. Derivando, em relação a x, a equação, obtemos $3\dfrac{x^2}{x_0^3} + 3\dfrac{y^2}{y_0^3}\dfrac{dy}{dx} = 0$ e, portanto, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2}{y^2}\dfrac{y_0^3}{x_0^3}$. Segue que o coeficiente angular m da reta tangente no ponto (x_0, y_0) é $m = -\dfrac{y_0}{x_0}$. A equação da reta tangente em (x_0, y_0) é então $y - y_0 = -\dfrac{y_0}{x_0}(x - x_0)$, ou seja, $\dfrac{x}{x_0} + \dfrac{y}{y_0} = 2$.

12. $V = xyz$, onde x, y e z são as arestas do paralelepípedo. Temos $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dx}{dt}yz + x\dfrac{dy}{dt}z + xy\dfrac{dz}{dt}$. Assim, no instante em que as arestas medem a, b e c, respectivamente, o volume V estará variando a uma taxa de $v_a bc + av_b c + abv_c$.

15. Pela lei dos senos $\dfrac{5}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{2}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha - \theta)}$, ou seja, $2 \operatorname{sen} \alpha = 5 \operatorname{sen} (\alpha + \theta)$.

Derivando em relação a t, resulta $2\cos\alpha\dfrac{d\alpha}{dt} = 5\,\left(\cos(\alpha+\theta)\right)\left(\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}\right)$. Segue que

$$2\frac{d\alpha}{dt} = 5\left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\operatorname{sen}\theta\right)\left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\theta}{dt}\right).$$

No instante em que $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, teremos $\dfrac{d\theta}{dt} = 0{,}01$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -5\sqrt{3}$. Assim, no instante em que $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, tem-se $\dfrac{d\alpha}{dt} = -\dfrac{1}{95}$.

(Atenção: Quando $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, pela lei dos co-senos tem-se $x^2 = 5^2 + 2^2 - 20\cos\theta$, onde x é o comprimento do lado oposto ao ângulo θ segue que $x = \sqrt{19}$. Novamente, pela lei dos co-senos tem-se $5^2 = 2^2 + 19 - 4\sqrt{19}\cos\alpha$ e, portanto, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{19}}$.).

16. O comprimento do lado oposto ao ângulo θ é $\sqrt{29 - 20\cos\theta}$. Pela lei dos senos, tem-se $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{5\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{29 - 20\cos\theta}}$. Tendo em vista a hipótese $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, temos

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{4-20\cos\theta+25\cos^2\theta}}{\sqrt{29-20\cos\theta}} = -\frac{|5\cos\theta-2|}{\sqrt{29-20\cos\theta}}.$$

Segue que $\dfrac{\text{sen }\alpha}{\cos\,\alpha} = -\dfrac{5\,\text{sen }\theta}{|5\cos\theta-2|}$. Observe que da hipótese $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ segue ainda que o lado oposto ao ângulo θ é menor que o oposto ao ângulo α, daí devermos ter

$\sqrt{29-20\cos\theta} < 5$ e, portanto, $\cos\theta > \dfrac{2}{5}$, ou seja, $5\cos\theta - 2 > 0$. Resulta então

$\dfrac{\text{sen }\alpha}{\cos\,\alpha} = -\dfrac{5\,\text{sen}\,\theta}{5\cos\theta-2}$. Substituindo na expressão que aparece no exercício anterior, vem

$$2\frac{d\alpha}{dt} = 5\left(\cos\theta + \frac{5\,\text{sen}^2\,\theta}{5\cos\theta-2}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d\theta}{dt}\right) = 5\left(\frac{5-2\cos\theta}{5\cos\theta-2}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Logo, $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{25-10\cos\theta}{20\cos\theta-29}\dfrac{d\theta}{dt}$.

32. Para $x = x_0$, temos $P(x_0) = A_0$. Derivando os dois membros da relação dada, em relação a x, obtemos $P'(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + 3A_3(x-x_0)^2$.

Para $x = x_0$, temos $P'(x_0) = A_1$. Derivando, em relação a x, a expressão anterior, obtemos $P''(x) = 2A_2 + 3\cdot 2A_3(x-x_0)$.

Para $x = x_0$, resulta $P''(x_0) = 2A_2$, ou seja, $A_2 = \dfrac{1}{2}P''(x_0)$. Derivando, em relação a x, a expressão anterior, resulta $P'''(x) = 3\cdot 2A_3$.

Para $x = x_0$, obtemos $P'''(x_0) = 3\cdot 2A_3$, ou seja, $A_3 = \dfrac{1}{3\,!}P'''(x_0)$. Logo,

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{P'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3.$$