# *CAPÍTULO 8*

*Exercícios 8.1*

**4. *a*)** Para todo $x \in D_g$, $g(x) = y \rightarrow x = f(y)$. Então, para todo $x \in D_g$, $f(g(x)) = f(y) = x$.

**5.** O domínio da função $f(x) = \text{arc sen } x$ é o intervalo $[-1, 1]$ e a imagem $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pelo fato de sen $x$ ser estritamente crescente em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, resulta que $f(x) = \text{arc sen } x$ é estritamente crescente em $[-1, 1]$. Pelo Exercício 12, $f(x) = \text{arc sen } x$ é contínua.

**10.** Sejam $r$ e $s$ dois reais quaisquer, com $r < s$. De $e^r < e^s$ e $e^{-r} > e^{-s}$ segue $\frac{e^r - e^{-r}}{2} < \frac{e^s - e^{-s}}{2}$, logo, $f$ é estritamente crescente e, portanto, inversível. Sendo $g$ sua inversa, $y = g(x) \Leftrightarrow x = f(y)$. Temos

$$x = f(y) \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \Leftrightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}.$$

Pelo fato de $e^y > 0$ e $\sqrt{4x^2 + 4} > 2x$, o sinal de menos que aparece no numerador da última fração deve ser descartado. Assim, $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ e, portanto,

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Logo, $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $x$ real, é a função inversa da função dada.

**11.** Como $y = x$ e $y = e^x$ são estritamente crescentes, segue que $f$ é também estritamente crescente, logo, inversível.

**12.** Sejam $I$ e $J$ o domínio e a imagem de $f$. Seja $p$ um ponto de $I$. Pelo fato de $f$ ser estritamente crescente, se $p$ não for extremidade de $I$, $f(p)$ não será, também, extremidade de $J$. Por outro lado, se $p$ for extremidade de $I$, $f(p)$ será, também, extremidade de $J$. Suponhamos que $p$ não seja extremidade de $I$; existirá, então, um $r > 0$ tal que $f(p) - r$ e $f(p) + r$ pertencerão a $J$. Tomando-se $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon < r$, $f(p) - \varepsilon$ e $f(p) + \varepsilon$ também pertencerão a $J$ e, portanto, existirão $p_1$ e $p_2$ em $I$ tais que $f(p_1) = f(p) - \varepsilon$ e $f(p_2) = f(p) + \varepsilon$; sendo $f$ estritamente crescente, para todo $x$, $p_1 < x < p_2$, teremos $f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon$, logo, $f$ é contínua em $p$. Suponhamos que $p$ seja extremidade, digamos, superior, de $I$. Nesta condição, existirá $r > 0$ tal que $f(p) - r$ pertença a $J$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, com

$\varepsilon < r$, $f(p) - \varepsilon$ também pertencerá a $J$, logo, existirá $p_1$ em $I$, com $f(p_1) = f(p) - \varepsilon$; assim, para todo $x$, com $p_1 < x \leqslant p$, teremos $f(p) - \varepsilon < f(x) \leqslant f(p)$, logo, $f$ é contínua em $p$. Portanto, $f$ é contínua em $I$.

**13.** ***a***) $f$ está definida para todo $x$ real, logo, o seu domínio é o intervalo $]-\infty, +\infty[$. Seja, agora, $z$ um real qualquer; de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ segue que existem reais $r$ e $s$, com $r < s$, tais que $f(r) < z < f(s)$. Da continuidade de $f$ e do teorema do valor intermediário, existirá $u$, $r < u < s$, tal que $f(u) = z$. Logo, a imagem de $f$ é o intervalo $]-\infty, +\infty[$.

***b***) É o Exercício 11.

***c***) É só aplicar o Exercício 12.

**14.** Sejam $r$ e $s$, com $r < s$, dois reais quaisquer de $I$. Sendo $f$ injetora, devemos ter $f(r) < f(s)$ ou $f(r) > f(s)$. Vamos mostrar que se ocorrer $f(r) < f(s)$, então, $f$ será estritamente crescente e se ocorrer $f(r) > f(s)$ $f$ será estritamente decrescente. Suponhamos que ocorra $f(r) < f(s)$ e seja $t$ pertencente a $I$. Mostraremos que se $t < r$, teremos $f(t) < f(r) < f(s)$; se $r < t < s$, então, $f(r) < f(t) < f(s)$ e se $t > s$, $f(r) < f(s) < f(t)$. Se $t < r$, poderemos ter $f(t) < f(r)$ ou $f(t) > f(r)$; se ocorresse $f(t) > f(r)$, teríamos $f(r) < f(t) < f(s)$ ou $f(r) < f(s) < f(t)$; no primeiro caso, da continuidade de $f$ e pelo teorema do valor intermediário existiria um $z$, com $r < z < s$, tal que $f(z) = f(t)$, o que é impossível, pois $f$ é injetora e $z \neq t$; no segundo caso, existiria um $w$, $t < w < r$, tal que $f(w) = f(s)$, o que é impossível. Com raciocínio análogo, provam-se os dois outros casos. Seja, agora, $u$ um real qualquer de $I$, com $u < t$; raciocinando como anteriormente, resulta $f(u) < f(t) < f(r)$, se $t < r$, $f(u) < f(t) < f(s)$, se $t < s$, $f(u) < f(s) < f(t)$, se $u < s < t$, ou $f(s) < f(u) < f(t)$, se $s < u < t$. Logo, quaisquer que sejam $u$ e $t$ em $I$, com $u < t$, teremos $f(u) < f(t)$ e, portanto, $f$ será estritamente crescente em $I$. Com raciocínio análogo, prova-se que se ocorrer $f(r) > f(s)$, então, $f$ será estritamente decrescente em $I$.

*Exercícios 8.2*

**2.** Como $f'(x) = 1 + e^x \neq 0$, para todo $x$, e pelo Exercício 13 da seção anterior $g$ é contínua, resulta, pelo teorema dessa seção, que $g$ é derivável. Segue que

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + e^{g(x)}}.$$

**3.** Vamos primeiro calcular $g(1)$. De $f(g(x)) = x$, segue $f(g(1)) = 1$ e, portanto, $1 + e^{g(1)} = 1$, logo, $g(1) = 0$. Já sabemos, pelo exercício anterior, que $g'(x) = \dfrac{1}{1 + e^{g(x)}}$, daí, $g'(1) = \dfrac{1}{2}$, pois, $g(1) = 0$. Vamos, agora, ao cálculo da derivada segunda de $g$. Temos,

$$g''(x) = \frac{-e^{g(x)}\, g'(x)}{(1 + e^{g(x)})^2};\text{ daí, } g''(1) = \frac{-\frac{1}{2}}{4} = -\frac{1}{8}.$$