CAPÍTULO 9

Exercícios 9.2

9. *a*) Consideremos a função $f(x) = e^x - (x + 1)$. Temos $f(0) = 0$ e $f'(x) = e^x - 1$. Segue que $f'(x) > 0$ para $x > 0$, e como f é contínua e derivável em $[0, \infty[$, resulta que f é estritamente crescente $[0, \infty[$. Daí e do fato de $f(0) = 0$ resulta $f(x) > 0$ para $x > 0$, ou seja, $e^x > 1 + x$ para $x > 0$.

***b*)** Seja $g(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$. Temos $g(0) = 0$ e $g'(x) = e^x - (1 + x) > 0$ para $x > 0$. Daí e do fato de g ser contínua e derivável em $[0, \infty[$, resulta que g é estritamente crescente em $[0, \infty[$ e, portanto, $g(x) > g(0) = 0$ para $x > 0$. Ou seja, para todo $x > 0$, tem-se $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

13. Como f' é contínua e nunca se anula em I, resulta $f'(x) > 0$ para todo x em I ou $f'(x) < 0$ em todo x em I. (Observe que se $f'(x)$ mudasse de sinal em I, pelo teorema do anulamento existiria um c em I tal que $f'(c) = 0$ que estaria em desacordo com a hipótese.) Logo, f é estritamente crescente ou estritamente decrescente em I.

14. *a*) $f'(x) = 2 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$ e, portanto, contínua em todo x.

***b*)** Como $|x| < \sqrt{x^2 + 3}$ para todo x, resulta $f'(x) \neq 0$ para todo x.
***c*)** Tendo em vista o exercício anterior, $f'(x) > 0$ em todo x ou $f'(x) < 0$ em todo x. Como $f'(0) = 2$, teremos $f'(x) > 0$ em todo x e, portanto, f será estritamente crescente.

15. Segue da hipótese que f'' é estritamente crescente em $]a, b[$. Como $f''(c) = 0$, $f''(x) < 0$ para $a < x < c$ e $f''(x) > 0$ para $c < x < b$. Logo, f' é estritamente decrescente em $]a, c[$ e estritamente crescente em $]c, b[$; tendo em vista $f'(c) = 0$, resulta $f'(x) > 0$ em $]a, c[$ e em $]c, b[$. Como f é contínua, f será estritamente crescente em $]a, c[$ e em $]c, b[$, logo estritamente crescente em $]a, b[$.

16. Sejam x e $x + h$ em I, com $h > 0$. Sendo f estritamente crescente, teremos $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$. Tendo em vista o teorema da conservação do sinal,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0.$$

17. Falsa: $f(x) = x^3$ é estritamente crescente e $f'(0) = 0$. (Veja Exercício 15.)

18. Sendo f crescente, tomando-se x e $x + h$, com $h > 0$, em I, teremos $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$.

Tendo em vista o teorema da conservação do sinal, $f'(x) = \displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$.

A recíproca é conseqüência do TVM.

19. Basta tomar $h(x) = g(x) - f(x)$ e observar que $h(c) = 0$ e $h'(x) = g'(x) - f'(x) > 0$ em $]a, b[$.

Exercícios 9.3

3. Já sabemos que, se a derivada de 2.ª ordem de f for contínua, então, uma condição necessária para um ponto p ser ponto de inflexão é que $f''(p) = 0$. No problema em questão, $f''(x) = 6ax + 2b$. Logo, $p = \dfrac{-b}{3a}$ é o único candidato a ponto de inflexão. Como $f''(x)$ tem sinais de nomes contrários nos intervalos $\left]-\infty, \dfrac{-b}{3a}\right[$ e $\left]\dfrac{-b}{3a}, +\infty\right[$, segue que $p = \dfrac{-b}{3a}$ é o único ponto de inflexão da função dada.

4. Supondo que f seja derivável até a 3.ª ordem no intervalo aberto I e que f''' seja contínua em p, com p em I, então uma condição suficiente para p ser ponto de inflexão horizontal é que $f'(p) = f''(p) = 0$ e $f'''(p) \neq 0$. De fato, pelo teorema da conservação do sinal, existe $r > 0$, com $p - r$ e $p + r$ em I tais que $f'''(x)$ tenha o mesmo sinal no intervalo $]p - r, p + r[$. Segue que f'' será estritamente crescente ou estritamente decrescente neste intervalo. Como $f''(p) = 0$, resulta que $f''(x)$ admitirá sinais de nomes contrários nos intervalos $]p - r, p[$ e $]p, p + r[$, ou seja, p será ponto de inflexão. Como $f'(p) = 0$, p será ponto de inflexão horizontal. (Uma outra condição suficiente é a seguinte: $f'(p) = 0$ e existe $r > 0$, com $p - r$ e $p + r$ em I tais que $f''(x)$ admita sinais de nomes contrários nos intervalos $]p - r, p[$ e $]p, p + r[$.)

6. Raciocine como no Exercício 4.

7. ***a***) A continuidade de f'' em todo $x \neq 0$ segue da continuidade de f' e da relação $f''(x) = \dfrac{4 - f'(x)}{x}$.
b) $p = 0$ não pode ser ponto de inflexão, pois da equação dada segue que, para $x = 0$, $f'(0) = 4$. Para $p \neq 0$, a condição $f'(p) = 0$ implicará $f''(p) = \dfrac{4}{p} \neq 0$ e, portanto, tal p não poderá ser ponto de inflexão.

9. Seja $T(x)$ a função cujo gráfico é a reta tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ no ponto de abscissa x_0. Como o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima, teremos $f(x) > T(x)$ para $x > a$. De $f'(x_0) > 0$, segue que $\lim\limits_{x \to +\infty} T(x) = +\infty$; daí e de $f(x) > T(x)$ para $x > a$, resulta $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

10. ***a***) Da derivabilidade de f em I segue a continuidade de f em I. A continuidade de f' segue então da equação dada. Temos $f''(x) = 2x + 2f(x)f'(x)$. A continuidade de f'' segue então da continuidade de f e de f'.
b) Da continuidade de f, de $f(1) = 1$ e do teorema da conservação do sinal, existe $r > 0$, com $r < \dfrac{1}{2}$, e $1 - r$ e $1 + r$ em I, tais que $f(x) > 0$ para $1 - r < x < 1 + r$. De $f'(x) = x^2 + f^2(x)$ e de $f''(x) = 2x + 2f(x)f'(x)$ seguem $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ em $]1-r, 1+r[$.
c) Fica a seu cargo.

11. ***a***) Temos $f''(x) = 2x + 2f(x)f'(x)$ e $f'''(x) = 2 + 2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x)$. Da hipótese e destas equações seguem $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = 2 \neq 0$. Tendo em vista a continuidade de f'' e o Exercício 4, resulta que 0 é ponto de inflexão de f.
b) De $x^2 > 0$, para $x \neq 0$, $f^2(x) \geqslant 0$ para x em $]-r, r[$ e $f'(x) = x^2 + f^2(x)$, resulta $f'(x) > 0$ para $x \neq 0$ e x em $]-r, r[$.
c) Do item anterior, segue que f é estritamente crescente em $]-r, r[$. Tendo em vista a condição $f(0) = 0$, segue que $f(x) < 0$ em $]-r, 0[$ e $f(x) > 0$ em $]0, r[$. De $f''(x) = 2x + 2f(x)f'(x)$ e do que vimos anteriormente, temos $f''(x) < 0$ em $]-r, 0[$ e $f''(x) > 0$ em $]0, r[$. Logo, 0 é ponto de inflexão de f.
d) Façamos $h(x) = f(x) - \dfrac{2}{3!}x^3$. Temos $h(0) = 0$ e $h'(x) = f'(x) - x^2$. Lembrando da equação dada, vem $h'(x) = f'(x) - x^2 = f^2(x)$. Tendo em vista $f(x) > 0$ em $]0, r[$, segue $h'(x) > 0$ em $]0, r[$. Assim, h é estritamente crescente em $]0, r[$. Tendo em vista $h(0) = 0$, resulta $h(x) > 0$ em $]0, r[$, e, portanto, $f(x) > \dfrac{2}{3!}x^3$ em $]0, r[$.
e) Fica a seu cargo.

5. ***a***) Sendo g derivável, pois f o é, e sendo p um ponto de máximo local e interior ao domínio de g, devemos ter $g'(p) = 0$. Por outro lado, $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. Assim, deveremos ter então $p\,f'(p) - f(p) = 0$.
b) $y - f(p) = f'(p)(x - p)$ é a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p. Fazendo $x = 0$, vem $y = f(p) - p\,f'(p) = 0$. Logo, a reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa p, passa pela origem. (**Sugestão**. Interprete geometricamente este resultado.)

6. ***a***) Sendo p um ponto de máximo local, deveremos ter $f'(p) = 0$, pois f é derivável e p ponto interior. Substituindo este p na equação resulta $f''(p) = 1$ e, assim, p não poderá ser ponto de máximo local.
b) Basta ver o item (a).
c) Suponhamos que $x_1 < x_2$ sejam dois pontos críticos; para fixar o raciocínio suporemos $f(x_1) < f(x_2)$. Se para todo x entre x_1 e x_2, $f(x) < f(x_2)$, x_2 não poderá ser ponto de mínimo local. Segue que existe x_3 entre x_1 e x_2, com $f(x_3) > f(x_2)$. Pelo teorema de Weierstrass, existe c em $[x_1, x_2]$ tal que $f(c) \geqslant f(x)$, para todo x em $[x_1, x_2]$. Como deveremos ter $f(c) \geqslant f(x_3)$, segue que $c \in \left]x_1, x_2\right[$. Assim, c será um ponto de máximo local de f, que está em desacordo com o item (a).

7. ***a***) Segue da equação que $f'(0) = 2$; logo, 0 não é ponto crítico. Sendo x_0, $x_0 \neq 0$, ponto de máximo local, deveremos ter $x_0\, f''(x_0) = 2$; daí $f''(x_0) \neq 0$. Deveremos ter então $f''(x_0) < 0$. Logo, $x_0 < 0$.
b) Raciocínio análogo ao do item (a).
c) Suponhamos que exista p tal que $f'(p) < 0$. Primeiro vamos supor $p < 0$. De $f'(p) < 0$ e da continuidade de f', segue do teorema da conservação do sinal que existe $r > 0$, com $p + r < 0$, tal que $f'(x) < 0$ em $[p, p + r[$. Logo, f é estritamente decrescente em $[p, p + r[$ e, portanto, existe $x_1 \in \left]p, 0\right[$, com $f(x_1) < f(p)$. De $f'(0) = 2 > 0$ e com raciocínio análogo ao anterior conclui-se que existe $x_2 \in \left]p, 0\right[$, com $f(x_2) < f(0)$. Pelo teorema de Weierstrass, existe $c \in [p, 0]$ tal que $f(c) \leqslant f(x)$, para todo $x \in [p, 0]$. Logo, f admitirá um ponto de mínimo local x_0, com $x_0 < 0$, que está em desacordo com o item (b). Deixamos a seu cargo verificar que $f'(p) < 0$, também, não poderá ocorrer com $p > 0$. Logo, $f'(x) > 0$, para todo x.

8. $g'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$; logo, existe $r > 0$, com $a + r < b$, tal que para $a < x < a + r$; $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} < \dfrac{g'(a)}{2} < 0$; como $x - a > 0$ para $a < x < a + r$, resulta $g(x) - g(a) < 0$, para $a < x < a + r$. Assim, existe $x_1 \in \left]a, b\right[$, tal $g(x_1) < g(a)$. Com raciocínio análogo, prova-se que existe $x_2 \in \left]a, b\right[$, com $g(x_2) < g(b)$. (CUIDADO. Aqui, não estamos supondo que a derivada de g seja contínua.) Da continuidade de g em $[a, b]$, segue do teorema de Weierstrass que existe c em $[a, b]$ tal que $g(c) \leqslant g(x)$, para todo x em $[a, b]$. Como devemos ter $g(c) \leqslant g(x_1)$ e $g(c) \leqslant g(x_2)$, resulta que $c \in \left]a, b\right[$, e, portanto, $g'(c) = 0$. (ATENÇÃO. Se admitíssemos a continuidade da derivada de g, o teorema de Darboux nada mais seria do que o teorema do anulamento. A importância do teorema de Darboux reside exatamente no fato de não precisar da continuidade da derivada.)