CAPÍTULO 1

Exercícios 1.1

1. Seja f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\} \\ 1 & \text{se } x \in \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\} \end{cases}$$

Seja P uma partição qualquer de [0, 1]

$P: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = 1$ e seja $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$ uma soma de Riemann de f relativa a esta partição.

Se nenhum dos $c_1, c_2, ..., c_n$ pertencer ao conjunto $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, então a soma de Riemann será zero.

Admitindo que algum ou alguns (um, dois ou três) c_i pertença ao conjunto $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, então $f(c_i) = 1$ e $f(c_i)\,\Delta x_i = \Delta x_i$ (para cada $c_i \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$). Portanto,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \right| < 3 \text{ máx } \Delta x_i.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existirá $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ (que só depende de ε) tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \right| < \varepsilon \text{ sempre que máx } \Delta x_i < \delta.$$

Em qualquer caso, temos, independentemente da escolha dos c_i e para toda partição P de [0, 1], com máx $\Delta x_i < \delta$, que

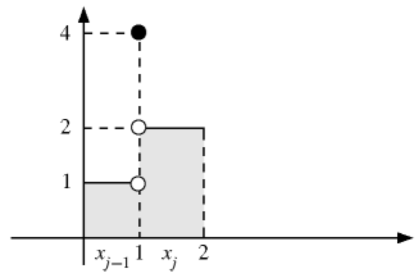
$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - 0 \right| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

3.

a) Seja $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 4 & \text{se} \quad x = 1 \\ 2 & \text{se} \quad 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$



Seja P uma partição qualquer de $[0, 2]$:

$P : 0 = x_0 < x_1 < ... < x_{j-1} < x_j < ... < x_n = 2$

Suponhamos que $1 \in [x_{j-1}, x_j]$. Temos

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{j-1} \underbrace{f(c_i)}_{1}\,\Delta x_i + f(c_j)\,\Delta x_j + \sum_{i=j+1}^{n} \underbrace{f(c_i)}_{2}\,\Delta x_i, \text{ onde } f(c_j) \in \{1, 2, 4\}$$

$$= x_{j-1} + f(c_j)\,(x_j - x_{j-1}) + 2(2 - x_j) = 3 - (x_j - x_{j-1}) + f(c_j)\,(x_j - x_{j-1}) + (1 - x_j).$$

Segue que

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - 3\Big| \leqslant |x_j - x_{j-1}| + 4\,|x_j - x_{j-1}| + |1 - x_j| \leqslant 6 \text{ máx } \Delta x_i.$$

Dado $\varepsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{6}$ tem-se

$$\text{máx } \Delta x_i < \delta \quad \Rightarrow \quad \Big|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - 3\Big| < \varepsilon.$$

Então, $\displaystyle\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = 3$ independentemente da escolha de c_i.

Logo, f é integrável e $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 3.$

d) Seja $f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Seja $P : -1 = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = 1$ uma partição qualquer de $[-1, 1]$ e $\dfrac{1}{2}$ seja um ponto dessa partição. Escolhamos $c_i \neq 0$ da seguinte forma: c_i irracional se $c_i < 0$ e c_i racional se $c_i > 0$. Desse modo, $f(c_i) > 0$ para todo i. Segue que a soma de Riemann será maior que a área do retângulo de vértices $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(1, 0)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ou seja, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i > \frac{1}{4}$. (Concorda?) Por outro lado, escolhendo c_i racional se $c_i < 0$ e c_i irracional se $c_i > 0$ teremos $f(c_i) < 0$, para todo i, e portanto, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i < 0$.

Logo, não existe L tal que $\lim\limits_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = L$, independentemente da escolha dos c_i. Ou seja, a função não é integrável.

Exercícios 1.2

1.

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ $-1 \leqslant x \leqslant 2.$

A função $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua em $[-1, 2]$.
Pelo teorema 1, se f é contínua em $[-1, 2]$, então f é integrável.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad -2 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{se} \quad 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$

f é limitada em $[-2, 2]$, pois, para todo x em $[-2, 2]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 4$; f é descontínua apenas em $x = 1$. Pelo teorema 2, como f é limitada em $[-2, 2]$ e descontínua apenas em $x = 1$, então f é integrável em $[-2, 2]$.

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \text{sen} \quad \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

A função é limitada e descontínua apenas em $x = 0$. Logo, pelo teorema 2, a função é integrável.

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad -1 \leqslant x < 0 \\ 5 & \text{se} \quad x = 0 \\ 2 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

f é limitada em $[-1, 1]$; f só é descontínua em $x = 0$. Portanto, f é integrável.