*C*APÍTULO 11

Exercícios 11.1

1. ***d*)** $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$.

Nos pontos (x, y), $x = 0$ ou $y = 0$, $f(x, y)$ não está definida, logo nestes pontos f não é diferenciável. Seja, então, (x, y), com $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

$$f \text{ é diferenciável em } (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} a)\ f \text{ admite derivadas parciais em } (x, y) \\ b)\ \displaystyle\lim_{(h,\ k)\to(0,\ 0)} \frac{E\,(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0 \end{cases}$$

onde:

$$E(h, k) = f\,(x + h, y + k) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot k\,.$$

$$E(h, k) = \frac{1}{(x + k)(y + k)} - \frac{1}{xy} + \frac{h}{x^2 y} + \frac{k}{xy^2}$$

pois $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2 y}$ e $\dfrac{df}{dy} = -\dfrac{1}{xy^2}$.

$$E(h, k) = \frac{h^2 y^2 + h^2 ky + k^2 x^2 + hkxy + hk^2 x}{(x + h)(y + k)\, x^2 y^2}\text{. Temos}$$

$$\lim_{(h, k)\to(0, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h, k)\to(0, 0)} \frac{1}{(x + h)(y + k)\, x^2 y^2} \cdot \frac{h^2 y^2 + h^2 ky + k^2 x^2 + hkxy + hk^2 x}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\lim_{(h, k)\to(0, 0)} \frac{1}{(x + h)(y + k)\, x^2 y^2} = \frac{1}{x^3 y^3}$$

$$\lim_{(h, k)\to(0, 0)} \frac{h^2 y^2}{\sqrt{h^2 + y^2}} = \lim_{(h, k)\to(0, 0)} \overset{0}{\cancel{hy^2}}\ \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{\text{limitada}} = 0$$

$$\lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \cancelto{0}{h^2 y}\ \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} = 0$$

$$\lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \cancelto{0}{kx^2}\ \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} = 0 \qquad \lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \cancelto{0}{hxy}\ \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} = 0$$

$$\lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \cancelto{0}{k^2 x}\ \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} = 0. \quad \text{Logo} \lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \frac{E(h,\,k)}{\|(h,\,k)\|} = 0.$$

$f(x,\,y) = \dfrac{1}{xy}$ é uma função diferenciável em todo $(x,\,y)$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

***f*)** $f(x,\,y) = x^2 + y^2$

Vamos provar que f é diferenciável em todo $(x,\,y)$ de $\mathbb{R}^2$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y) = 2x \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y) = 2y.$$

Além disso:

$$\begin{aligned} E(h,\,k) &= f(x+h,\,y+k) - f(x,\,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y)\cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)\cdot k \\ &= (x+h)^2 + (y+k)^2 - x^2 - y^2 - 2xh - 2yk \\ &= h^2 + k^2 \end{aligned}$$

$$\text{e} \lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \frac{E(h,\,k)}{\underbrace{\|(h,\,k)\|}_{\neq}} = \lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \left[h \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + k \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right] = 0.$$

Como f admite derivadas parciais em todo $(x,\,y) \in D_f = \mathbb{R}^2$ e $\displaystyle\lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \frac{E(h,\,k)}{\|(h,\,k)\|} = 0$ então f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Exercícios 11.2

1. ***f*)** Seja $f(x, y) = \text{arctg } xy$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{1 + x^2y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{1 + x^2y^2}.$$

Então $f(x, y)$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, isto é, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Logo $f(x, y) = \text{arctg } xy$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Exercícios 11.3

1. ***e*)** Seja $f(x, y) = \text{arctg } (x - 2y)$.

Para que f admita plano tangente no ponto $(2, \frac{1}{2}, f(2, \frac{1}{2}))$ f deve ser diferenciável em $(2, \frac{1}{2})$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + (x - 2y)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2}{1 + (x - 2y)^2}.$$

Da continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em $\mathbb{R}^2$, segue que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, logo f é diferenciável em $(2, \frac{1}{2})$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, \frac{1}{2}) = -1$$

Equação do plano tangente:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 2) - (y - \frac{1}{2}) \text{ e, portanto,}$$

$$z = \frac{x}{2} - y - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Equação da reta normal:

$$(x, y, z) = (2, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}) + \lambda(\frac{1}{2}, -1, -1).$$

***f*)** Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Plano tangente:

$$z - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\,(y - \frac{1}{2}) \text{ ou seja, } z = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}.$$

Reta normal:

$$(x, y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + \lambda\,(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. ***a*)** Plano tangente em (1, 1, 1)

$$2x + y + 3z = 6 \text{ ou seja, } \quad z = -\frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y + 2.$$

Por outro lado:

$$z - 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)\,(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)\,(y - 1)$$

e daí

$$z = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)}_{-\frac{2}{3}} \cdot x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)}_{-\frac{1}{3}} \cdot y \underbrace{- \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) + 1}_{2}.$$

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -\dfrac{1}{3}$.

***b*)** Reta normal:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

ou seja,
$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda\,(2, 1, 3)$.

7. Seja $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$. O plano tangente em (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$, é

$z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0)\,(y - y_0)$. Para que tal plano passe pela origem, devemos ter

$$f(x_0, y_0) = x_0\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0) + y_0\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0).$$

De

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4 + 3\,x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

segue

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}+y\,\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^5+x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3}{x^2+y^2}=f(x,y).$$

Logo, o plano tangente em (x_0, y_0, z_0) passa pela origem.

10. Sejam $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ e

$$g(x, y) = -x^2 - y^2.$$

Equação do plano tangente β em $(a, b, f(a, b))$:

$$z-f(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)$$

$$z = 2 + a^2 + b^2 + 2a(x - a) + 2b(y - b)$$

$$z = 2 - a^2 - b^2 + 2ax + 2by. \quad ①$$

Reta normal ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$

$(x, y, z) = (a, b, f(a, b)) + \lambda(2a, 2b, -1)$.

Seja $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ o ponto em que β tangencia o gráfico de g.

Reta normal ao gráfico de g em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(-2x_0, -2y_0, -1)$.

Os vetores $(2a, 2b, -1)$ e $(-2x_0, -2y_0, -1)$ são paralelos. Logo o produto vetorial é nulo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2a & 2b & -1 \\ -2x_0 & -2y_0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow (-2b-2y_0)\,\vec{i}+(2x_0+2a)\,\vec{j}+(4bx_0-4ay_0)\,\vec{k}=0$$

Daí $x_0 = -a$ e $y_0 = -b$.

$(-a, -b, g(-a, -b)) = (-a, -b, -a^2 - b^2) \in \beta$ (plano tangente)

Substituindo em ①:

$$-a^2 - b^2 = 2 - a^2 - b^2 + 2a\,(-a) + 2b\,(-b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1.$$

13. Considere $f(x, y) = x \cdot g(\underbrace{x^2 - y^2}_{u})$ onde $g(u)$ é função derivável de uma variável.

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x\cdot g'(u)\cdot 2x+g(u)=2x^2\,g'(u)+g(u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot g'(u) \cdot (-2y) = -2xy\, g'(u).$$

Daí

$$f(a, a) = a\,\frac{\partial f}{\partial x}(a, a) + a\,\frac{\partial f}{\partial y}(a, a)$$

que é a condição para que o plano tangente em $(a, a, f(a, a))$

$$z - f(a, a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, a)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, a)(y - a)$$

passe pela origem.

15. $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} E(x, y) = 0,$ pois, para $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, tem-se

$$E(x, y) = \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \cdot \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}.$$

Sendo $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0), será também contínua neste ponto. Segue que

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} \underbrace{[f(x, y) - a(x - x_0) - b(y - y_0) - c]}_{E(x,\, y)} = f(x_0, y_0) - c = 0,$$

logo, $c = f(x_0, y_0)$. Fazendo $y = y_0$ em $\dfrac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}$ resulta

$$\frac{E(x, y)}{\|(x, y_0) - (x_0, y_0)\|} = \frac{E(x, y_0)}{|x - x_0|} = \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|}.$$

De $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} \dfrac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$ resulta $\lim_{x\to x_0} \dfrac{E(x, y_0)}{|x - x_0|} = 0$ que é equivalente a

$\lim_{x\to x_0} \dfrac{E(x, y_0)}{x - x_0} = 0.$ Segue que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Daí, $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = a$ e, portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a.$ Com raciocínio análogo, verifica-se que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = b.$

Exercícios 11.4

6. $P = \dfrac{V^2}{R}$. Temos

$\Delta P \cong dP.$

$$dP = \frac{2\,VRdV - V^2 dR}{R^2}.$$

$dV = -0{,}2$ volt e
$dR = 0{,}01$ ohm.

Substituindo

$$dP = \frac{2 \times 100 \times 10 \times (-0,2) - 10^4 \times 0,01}{10^2} = -5. \text{ Logo } \Delta P \cong -5\text{W}.$$

Exercícios 11.5

1.
a) $f(x, y) = x^2 y$. Temos

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Rightarrow \nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$$

ou $\nabla f(x, y) = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$.

b) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$. Temos

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2xe^{x^2-y^2}, -2y\, e^{x^2-y^2})$$

ou

$$\nabla f(x, y) = e^{x^2-y^2} \; (2x\vec{i} - 2y\vec{j}).$$

c) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$. Temos

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} \right)$$

ou $\nabla f(x, y) = \dfrac{1}{y}\vec{i} - \dfrac{x}{y^2}\vec{j}$.

d) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$. Temos

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$$

ou

$$\nabla f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} - \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}.$$

6. Como estamos admitindo que a imagem de γ está contida na superfície de nível $f(x, y, z) = 1$, teremos $(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2 = 1$, para todo t no domínio de γ. Derivando em relação a t, resulta

$2x(t)\,x'(t) + 2y(t)\,y'(t) + 2z(t)\,z'(t) = 0.$

Para $t = t_0$,
$(2x_0, 2y_0, 2z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$
e, portanto,
$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$
Como a curva γ é qualquer, podemos interpretar $\nabla f(x_0, y_0)$ como um vetor normal em (x_0, y_0, z_0) à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

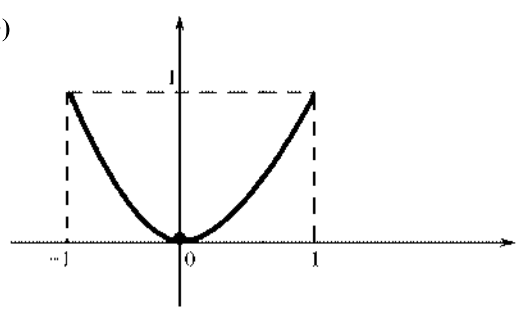
8. Seja $f(x, y) = xy$.
$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I$, é diferenciável e sua imagem está contida na curva de nível $f(x, y) = 2$.
Assim, para todo t em I, temos
$x(t)\,y(t) = 2.$
Derivando em relação a t, resulta
$x'(t)\,y(t) + x(t)\,y'(t) = 0,$
ou seja,
$(y(t), x(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$
e, portanto, para todo t em I,
$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0.$
A imagem da curva $\gamma(t) = \left(t, \dfrac{2}{t}\right), t > 0,$ está contida na curva de nível $xy = 2$.

9. Sejam $f(x, y) = y - x^2$ e $\gamma(t) = (\text{sen } t, \text{sen}^2 t)$.

a) De $x(t) = \text{sen } t$ e $y(t) = \text{sen}^2 t$ resulta
$y(\text{t}) - x^2(t) = \text{sen}^2 t - \text{sen}^2 t = 0$ para todo t. Logo,

$Im\gamma$ está contida na curva de nível $f(x, y) = 0$.

b)



A imagem de γ é o arco da parábola $y = x^2, -1 \leqslant x \leqslant 1$.

c) $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = (\cos t, 2 \text{ sen } t \cos t)\cdot(-2 \text{ sen } t, 1)$
$= -2 \text{ sen } t \cos t + 2 \text{ sen } t \cos t = 0$

pois $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1,$ $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (\cos t, 2 \operatorname{sen} t \cos t)$ e

$\nabla f(\gamma(t)) = (-2 \operatorname{sen} t, 1).$

10. Seja $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.

***a*)** A imagem de $\gamma(t) = \left(\operatorname{sen} t, \dfrac{1}{2}\cos t, 0\right)$ está contida na superfície, pois

$$x^2(t) + 4\,y^2(t) + 9\,z^2(t) = \operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t + 9 \cdot 0 = 1, \text{ para todo } t.$$

***b*)** Sendo $\gamma(t)$ a curva do item ***a*)**, temos

$\nabla f(\gamma(t)) = (2 \operatorname{sen} t, 4 \cos t, 0)$

e

$$\gamma'(t) = \left(\cos t, -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t, 0\right).$$

Segue que

$$\begin{aligned} \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= (2 \operatorname{sen} t, 4 \cos t, 0) \cdot \left(\cos t, -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t, 0\right) \\ &= 2 \operatorname{sen} t \cos t - 2 \operatorname{sen} t \cos t = 0. \end{aligned}$$

O gradiente é normal em $\left(\operatorname{sen} t, \dfrac{1}{2}\cos t, 0\right)$ à curva $\gamma(t)$.