CAPÍTULO 12

Exercícios 12.1

1. ***a***) $z = \text{sen}\, xy,\ x = 3t$ e $y = t^2$.

1.º Processo:

$z = \text{sen}\,(3t^3)$ e daí

$$\frac{dz}{dt} = 9t^2 \cos(3t^3).$$

2.º Processo:

$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$. Temos

$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos xy;\ \frac{dx}{dt} = 3;\ \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos xy;\ \frac{dy}{dt} = 2t$ e daí

$\frac{dz}{dt} = 3\, y \cos xy + x\,(\cos xy) \cdot 2t$, ou seja,

$\frac{dz}{dt} = 3t^2 \cos 3t^3 + 6t^2 \cos 3t^3$ e, portanto,

$$\frac{dz}{dt} = 9t^2 \cos 3t^3.$$

b) $z = x^2 + 3y^2,\ x = \text{sen}\, t$ e $y = \cos t$.

1.º Processo:

$z = \text{sen}^2\, t + 3 \cos^2 t$ e daí

$$\frac{dz}{dt} = 2\, \text{sen}\, t \cos t - 6\, \text{sen}\, t \cos t = -\,4\, \text{sen}\, t \cos t.$$

2.º Processo:

$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$. Temos

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x;\ \frac{dx}{dt} = \cos t;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 6y;\ \frac{dy}{dt} = -\text{sen}\, t$. Segue que

$\dfrac{dz}{dt} = 2x \cos t - 6y \text{ sen } t$, ou seja,

$\dfrac{dz}{dt} = 2 \text{ sen } t \cos t - 6 \text{ sen } t \cos t$ e, portanto,

$\dfrac{dz}{dt} = -4 \text{ sen } t \cos t.$

4. $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t,$

$x = t^2$ e $y = 2t.$

$\dfrac{dx}{dt} = 2t;\ \dfrac{dy}{dt} = 2$ e $\dfrac{df}{dt} = 3t^2 - 3$. Temos

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Em $(x, y) = (1, 2)$, $t^2 = 1$ e $2t = 2$. Portanto, $t = 1$.

$$3t^2 - 3 = 2t\,\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$$

$$0 = 2\,\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(1,2).$$

Ou seja: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2).$

5.

a) $f(3x, x^3) = \text{arctg } x$, para todo x. Segue que, para todo t, temos, também, $f(3t, t^3) = \text{arctg } t$. Derivando em relação a t,

$\dfrac{d}{dt}\,[f(x, y)] = \dfrac{d}{dt}\,[\text{arctg } x]$, onde $x = 3t$ e $y = t^3$.

Daí,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{dy}(x, y)\,\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{1 + t^2}$, para todo t.

Para $t = 1$,

$$3\,\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) + 3\,\frac{\partial f}{dy}(3, 1) = \frac{1}{2}.$$

Tendo em vista que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2$, resulta $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = \dfrac{-11}{6}.$

b) Equação do plano tangente

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Em $(3, 1, f(3, 1))$, $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ e $f(3, 1) = \text{arctg } 1 = \dfrac{\pi}{4}$.
Substituindo:

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)\,(x - 3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1)\,(y - 1) \text{ e, portanto,}$$

$$z - \frac{\pi}{4} = -\frac{11}{6}\,(x - 3) + 2\,(y - 1).$$

9. Seja $g(t) = f\left(t, \dfrac{2}{t}\right), t > 0$. Considerando $x = t$ e $y = \dfrac{2}{t}$, temos

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}, \text{ onde } \frac{dx}{dt} = 1 \text{ e } \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{t^2}, \text{ ou seja,}$$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y) - \frac{2}{t^2}\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y). \text{ Daí, para todo } t > 0,$$

$$g'(t) = \frac{1}{t}\left[t\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{2}{t}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{1}{t}\underbrace{\left[x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]}_{0 \text{ (por hipótese)}} = 0.$$

Logo, $g\,(t)$, $t > 0$ é constante.

12. Consideremos $F(x, y) = f\left(\underbrace{\dfrac{x}{y}}_{u}, \underbrace{\dfrac{y}{x}}_{v}\right)$.

$$u(x, y) = \frac{x}{y};\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

$$v(x, y) = \frac{y}{x};\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2};\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y}\,\frac{\partial f}{\partial u} + \left(-\frac{y}{x^2}\right)\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(-\frac{x}{y^2}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Substituindo:

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}=x\left[\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v}\right]+y\left[-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial v}\right].$$

Logo, $x\dfrac{\partial F}{\partial x}+y\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$.

13. $u=f(w,z)$, onde $w=x+at$ e $z=y+bt$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=a\frac{\partial f}{\partial w}+b\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\partial f}{\partial w},\ \text{pois, } \frac{\partial w}{\partial x}=1 \ \text{ e } \ \frac{\partial w}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Segue que

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}.$$

17. Seja $g(x,y)=(x^2+y^2)f(u,v)$ onde $u=2x-y$ e $v=x+2y$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}=2x\,f(u,v)+(x^2+y^2)\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\ \text{ onde } \ \frac{\partial u}{\partial x}=2 \ \text{ e } \ \frac{\partial v}{\partial x}=1.$$

Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

Substituindo em $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ vem:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=2x\,f(u,v)+(x^2+y^2)\left[2\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right].$$

23. Seja $f(x,y,\underbrace{x^2+y^2}_{z})=0$ para todo (x, y).

Derivando em relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial x}}(x)}_{1}+\frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial x}}(y)}_{0}+\frac{\partial f}{\partial z}\underbrace{\cancel{\frac{\partial z}{\partial x}}}_{2x}=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+2x\frac{\partial f}{\partial z}=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial x}=-2x\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Derivando em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(x)+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+2y\frac{\partial f}{\partial z}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Em (1, 1, 2):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,2)=-2\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)=-2\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,2).$$

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,2)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)$.

24. Seja $F(x, y, z) = f\left(\underbrace{\frac{x}{y}}_{u}, \underbrace{\frac{y}{z}}_{v}, \underbrace{\frac{z}{x}}_{w}\right)$.

$$u(x,y,z)=\frac{x}{y};\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y};\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2};\ \frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

$$v(x,y,z)=\frac{y}{z};\ \frac{\partial v}{\partial x}=0;\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{z};\ \frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}.$$

$$w(x,y,z)=\frac{z}{x};\ \frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{z}{x^2};\ \frac{\partial w}{\partial y}=0;\ \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{x}.$$

Aplicando a regra da cadeia e fazendo as substituições convenientes, segue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{z}{x^2}\frac{\partial f}{\partial w},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial w}.$$

Então:

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=x\left[\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{z}{x^2}\frac{\partial f}{\partial w}\right]$$

$$+y\left[-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial v}\right]+z\left[-\frac{y}{z^2}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial w}\right]$$

e daí

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

25. Seja $F(xy,\, t) = 0$, onde $z = (x,\, y)$.

Fazendo $u = xy$ e $v = z$, sabemos que $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,\, v) \neq 0$.

Logo $\dfrac{\partial F}{\partial z}(xy,\, z) \neq 0$.

$\dfrac{\partial}{\partial x}[F(xy,\, z)] = 0$, pois $F(xy,\, z) = 0$.

Pela regra da cadeia

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\,[F\,(u,\,v)]}_{0}=\frac{\partial F}{\partial u}\cancelto{y}{\frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Daí, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-y\,\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$. $\qquad\qquad\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0\right)$

Analogamente:

$\dfrac{\partial}{\partial y}[F(xy,\, z)] = 0$, pois $F(xy,\, z) = 0$.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\,[F\,(u,\,v)]}_{0}=\frac{\partial F}{\partial u}\cancelto{x}{\frac{\partial u}{\partial y}}+\frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial F}{\partial u}+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}}_{\neq 0}\,\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Daí, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\,x\,\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$.

Substituindo:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-\,xy\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}+xy\,\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=0.$$

26. ***a)*** $f(x,\, y)$ é homogênea de grau λ, em A, se $f\,(at,\, bt) = t^{\lambda} f\,(a,\, b)$ para todo $t > 0$ e para todo $(a,\, b) \in A$, com $(at,\, bt) \in A$.

Sejam $x = at$ e $y = bt$.

Derivando em relação a t os dois membros de $f(at, bt) = t^\lambda f(a, b)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{a} + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{b} = \lambda\, t^{\lambda-1}\, f(a, b).$$

Logo, $a\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(at, bt) + b\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(at, bt) = \lambda\, t^{\lambda-1}\, f(a,\ b)\ (t > 0), (at, bt) \in$ A.

***b*)** Na relação anterior fazendo $t = 1$, $a = x$ e $b = y$, obtemos a relação de Euler:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y).$$

27. Para cada (a, b) em A, consideremos o maior intervalo aberto $I =]\, r, s\,]$, com $r > 0$, tal que (at, bt) pertença a A para todo t em I; tal intervalo existe, pois A é uma bola aberta. Observe que $t = 1$ pertence a este intervalo. Para cada (a, b) em A, consideremos a função

$$g(t) = \frac{f\,(at,\ bt)}{t^\lambda},\ r < t < s.$$

Vamos mostrar que $g(t)$ é constante e igual a $f(a, b)$, para todo t em I. Daí seguirá $f\,(at, bt) = t^\lambda f(a, b)$, para todo $t > 0$ e para todo (a, b) em A, com (at, bt) em A. Para concluir que $g(t)$ é constante em I, e pelo fato de I ser um intervalo, basta mostrar que $g'(t) = 0$ em I. Temos

$$g'(t) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left[f\ (at,\ bt)\right]t^\lambda - \lambda t^{\lambda-1}\ f\,(at,\ bt)}{t^{2\lambda}},\ \text{para } t \text{ em } I.$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dt}\left[f\,(at,\ bt)\right] = \frac{\partial f}{\partial x}\ (at,\ bt)\ a + \frac{\partial f}{\partial y}(at,\ bt)\,b.$$

Substituindo na derivada acima, simplificando e lembrando da hipótese
$x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ y) +\ y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)\ = \lambda\, f\,(x, y)$, obtemos ($x = at$ e $y = bt$)

$$g'(t) = \frac{at\dfrac{\partial f}{\partial x}(at,\ bt) + bt\dfrac{\partial f}{\partial y}(at,\ bt) - \lambda\, f\,(at,\ bt)}{t^{\lambda+1}} = 0,\ \text{para todo } t \text{ em } I.$$

Logo, $g(t)$ é constante no intervalo I. Como $g(1) = f(a,\ b)$ e 1 pertence a I, resulta $g(t) = \dfrac{f\,(at,\ bt)}{t^\lambda}\ f(a, b)$, para todo t em I. Temos então

$$f\,(at, bt) = t^\lambda\, f\,(a, b),$$

para todo $t > 0$ e para todo (a, b) em A, com (at, bt) em A. Ou seja, $f(x, y)$ é homogênea de grau λ em A.

29. A função dada verifica a equação $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = -f$ (relação de Euler) porque trata-se de função homogênea de grau (-1).

31. Supondo f diferenciável no aberto A e homogênea de grau λ, tem-se:

$f(tx, ty) = t^{\lambda} f(x, y)$

Derivando em relação a x os dois membros:

$$t\,\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad (t > 0)$$

Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\lambda-1}\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y).$

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é função homogênea de grau $\lambda - 1$.

Exercícios 12.2

3. ***a***) $e^{x+y+z} + xyz = 1.$
Seja $F(x, y, z) = e^{x+y+z} + xyz - 1.$

F é de classe C^1 no aberto A $= \mathbb{R}^3$. Observe que

$F(0, 0, 0) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = e^{x+y+z} + yx = 1 \neq 0.$

Pelo teorema das funções implícitas, a equação define uma função $z = g(x, y)$ de classe C^1 num aberto B do $\mathbb{R}^2$, com $(0, 0) \in B$.
A função $z = g(x, y)$ é diferenciável.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{e^{x+y+z} + yz}{e^{x+y+z} + xy} \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{e^{x+y+z} + xz}{e^{x+y+z} + xy}.$$

b) $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z$

F é de classe C^1 no aberto $A = \mathbb{R}^3$.

$$F(1, 1, 1) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = 2 \neq 0.$$

Pelo teorema das funções implícitas, existirá uma bola aberta B de centro (1, 1) e um intervalo I, com $z_0 = 1 \in I$, tais que, para cada $(x, y) \in B$, existe um único $g(x, y) \in I$ com $F(x, y, g(x\, y)) = 0$.

A função $z = g(x, y)$ é diferenciável e

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{3y^2 - 1}{3z^2 - 1}.$$

4. $x = F(x^2 + y, y^2)$, onde $y = y(x)$ e $F(u, v)$ são diferenciáveis.

Derivando em relação a x:

$$\frac{d}{dx}[x] = \frac{d}{dx}\left[F(x^2 + y, y^2\right], \text{ ou seja,}$$

$$1 = \frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$1 = \frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2)\left[2x + \frac{dy}{dx}\right] + \frac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)\, 2y\frac{dy}{dx}$$

$$1 - 2x\frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2) = \left[\frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2) + 2y\frac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)\right]\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x\dfrac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2)}{\dfrac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2) + 2y\dfrac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)}$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x\dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v)}{\dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v) + 2y\dfrac{\partial F}{\partial v}(u, v)}, \; u = x^2 + y \text{ e } v = y^2.$$

5. *a*) $y = g(x)$ é diferenciável no intervalo aberto I e dada implicitamente por $f(x, y) = 0$ com $f(x, y)$ de classe C^2. Uma condição necessária para que x_0 seja ponto de máximo local de g é que $g'(x_0) = 0$. Derivando em relação a x, $f(x, y) = 0$ (utilizando a regra da cadeia) temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, g'(x) = 0 \text{ e daí } g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)}, \text{ pois, por hipótese,}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ em D_f. Como

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

resulta que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ é condição necessária para que x_0 seja ponto de máximo local de g.

b) $g'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$.

Derivando novamente, utilizando regra da cadeia, segue:

$$g''(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot g'(x)\right) - \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot g'(x)\right)}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Substituindo $g'(x)$ por seu valor:

$$g''(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 y} \cdot \left(-\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right)\right] - \dfrac{\partial f}{\partial x}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(-\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right)\right]}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$$g''(x) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

Como $f(x, y)$ é suposta de classe C^2, f admite derivadas parciais de ordem 1 e 2 contínuas. Então $g''(x)$ é um quociente de funções contínuas $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \text{ em } D_f\right)$, logo, g'' é uma função contínua.

c) Uma condição suficiente para que x_0 seja ponto de máximo local de g é que $g'(x_0) = 0$ e $g''(x_0) < 0$.

Segue então dos itens (***a***) e (***b***) e que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e}$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\dfrac{\partial f}{\partial x}\,\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3} > 0 \text{ em } (x_0, y_0)$$

é uma condição suficiente para x_0 ser ponto máximo local de $g(x)$.

7. São dados $f(u, v) = 0$, $u = \dfrac{x}{y}$, $v = \dfrac{z}{x^{\lambda}}$, $\lambda \neq 0$ constante, com $z = z(x, y)$ e $f(u, v)$ diferenciáveis e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u, v) \neq 0$. Queremos mostrar que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lambda z$.

Derivando em relação a x e depois em relação a y os dois membros da equação $f(u, v) = 0$, obtemos

$$\frac{1}{y}\,\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^{-\lambda}\,\frac{\partial z}{\partial x} - \lambda x^{-\lambda-1}\,z\right) = 0$$

e

$$-\frac{x}{y^2}\,\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^{-\lambda}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Multiplicando a primeira equação por x, a segunda por y, somando membro as equações obtidas e lembrando que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u, v) \neq 0$, resulta

$$x^{-\lambda}\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - \lambda z\right) = 0$$

e, portanto,

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda z.$$

(Observe que pelos dados devemos ter obrigatoriamente $x \neq 0$.)

11. ***a***) $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$ é o determinante jacobiano de F e G em relação a x e y.

Sendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $G(x, y, z) = x + y + z$, temos

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y = 2(x - y).$$

b) Sendo $u = xyz$ e $v = x^3 + y^2$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xz & xy \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -\,2xy^2.$$

c) Sendo $x = r + 3\mathrm{s} + t^2$ e $y = r^2 - \mathrm{s}^2 - 3\mathrm{t}^2$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2r & -2s \end{vmatrix} = -\,2s - 6r = -\,2(s + 3r).$$

d) Sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2t \\ -2s & -6t \end{vmatrix} = -\,18t + 4st = -\,2t(9 - 2s).$$