Capítulo 16

Exercícios 16.2

1. Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$.

Os únicos candidatos a extremantes locais são os pontos críticos de f pois o $D_f = \mathbb{R}^2$ é aberto.

De $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x - 2y$

$\quad\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x - 1$

resulta que os candidatos a extremantes locais são as soluções do sistema: $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2y - 2x - 1 = 0. \end{cases}$

A solução do sistema é $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Temos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0, \dfrac{1}{2}\right) = 4 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(0, \dfrac{1}{2}\right) = 2 > 0$.

Portanto, $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ é candidato a ponto de mínimo local.

3. $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy + 5$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + x.$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ -2y + x = 0 \end{cases}$

encontramos os pontos críticos (0, 0) e $\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}\right)$.

Agora

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \leqslant 0$ e $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}\right) = -1 < 0;$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -2 < 0$ e $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}\right) = -2 < 0.$

O ponto $\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}\right)$ é candidato a ponto de máximo local.

Seja $g(x) = f(x, 0) = x^3 + 5$. O ponto $x = 0$ não é extremante local de $g(x)$. Portanto, o ponto $(0, 0)$ não é extremante local de $f(x, y)$.

6. $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5x^4 - 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5y^4 - 5.$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 5x^4 - 5 = 0 \\ 5y^4 - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = \pm 1 \\ y = \pm 1. \end{matrix}$

Os pontos $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ são pontos críticos. Temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 20x^3, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 20 > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -20 < 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 20y^3, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 20 > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -1) = -20 < 0.$$

O ponto $(1, 1)$ é candidato a mínimo local, e o ponto $(-1, -1)$, máximo local.
Agora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 20 > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = -20 < 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1) = -20 < 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) = 20 > 0.$$

Os pontos $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ não são extremantes locais.

Exercícios 16.3

1. *a*) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y - 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 8y + 3x + 2.$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x + 8y = -2 \end{cases}$

Ponto crítico: $\left(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}\right)$.

Hessiano de f:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7$$

$H\left(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}\right) = 7 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}\right) = 2 > 0$. Logo, $\left(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}\right)$ é ponto de mínimo local de f, e também mínimo global (conforme Exercício 2).

c) $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2y - 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + 2x.$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 3x^2 + 2y = 5 \\ 2y + 2x = 0 \end{cases}$

Pontos críticos: $(-1, 1)$ e $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

Hessiano de f:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 4.$$

$H(-1, 1) = -16 < 0$, então, $(-1, 1)$ é ponto de sela.

$$H\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) = 20 + \frac{20}{3} = \frac{80}{3} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) = 10 > 0.$$

Logo, $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ é ponto de mínimo local.

(Não é mínimo global, pois $g(x) = f(x, 0) = x^3 - 5x$ e $f(x, 0) \to -\infty$ para $x \to -\infty$.)

e) $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 27y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 6xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3x^2 + 27$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 3x^2 - 6xy = 0 \\ -3x^2 + 27 = 0 \end{cases}$

encontramos:

$\left(3, \frac{3}{2}\right)$ e $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$.

Hessiano de f:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x - 6y & -6x \\ -6x & 0 \end{vmatrix}$$

$$H\left(3, \frac{3}{2}\right) = \begin{vmatrix} 9 & -18 \\ -18 & 0 \end{vmatrix} = -324 < 0$$

$$H\left(-3, -\frac{3}{2}\right) = \begin{vmatrix} -9 & 18 \\ 18 & 0 \end{vmatrix} = -324 < 0$$

Logo, $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ e $\left|-3, -\frac{3}{2}\right|$ são pontos de sela.

4. Seja $P = (0, 0, 0)$ e $P_1 = (x, y, \underbrace{x + 2y - 4}_{z})$.

Distância entre os pontos P e P_1: $d(P, P_1) = \sqrt{x^2 + y^2 + (x + 2y - 4)^2}$

Vamos minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2 + (x + 2y - 4)^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\ (x, y) = 2x + 2(x + 2y - 4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\ (x, y) = 2y + 4(x + 2y - 4)$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 4x + 4y = 8 \\ 4x + 10y = 16 \end{cases}$ obtemos

$x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{4}{3}$ e $z = -\frac{2}{3}$.

$H(x, y) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 24 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = 4 > 0$. Logo, $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ é ponto de mínimo global de $f(x, y)$.

Assim, $P_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ é o ponto procurado.

7. *a*) Seja $f(x) = \alpha x + \beta$ e

$$E\ (\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{4}\ [f(a_i) - b_i]^2.$$

Consideremos:

	a_i	b_i	a_i^2	$a_i b_i$
	5	100	25	500
	6	98	36	588
	7	95	49	665
	8	94	64	752
Σ	26	387	174	2505

$$E\ (\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{4}\ [\alpha a_i + \beta - b_i]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{4}\ 2a_i\ (\alpha a_i + \beta - b_i)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{4} 2\ (\alpha a_i + \beta - b_i).$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha \sum_{i=1}^{4} a_i^2 + \beta \sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{i=1}^{4} a_i b_i \\ \alpha \sum_{i=1}^{4} a_i + 4\beta = \sum_{i=1}^{4} b_i \end{cases}$$

Logo, $\begin{cases} 26\alpha + 4\beta = 387 \\ 174\alpha + 26\beta = 2505 \end{cases}$

Daí, $\alpha = -\dfrac{21}{10}$ e $\beta = \dfrac{1104}{10}$.

A reta que melhor se ajusta aos dados observados é $y = -\dfrac{21}{10}x + \dfrac{1104}{10}$.

***b*)** Se $x = 10$, então $y = -21 + 110{,}4 = 89{,}4$.

10. $L(x, y) = x(120 - 2x) + y(200 - y) - (x^2 + 2y^2 + 2xy)$
$L(x, y) = -3x^2 - 3y^2 - 2xy + 120x + 200y$.

Para maximizar o lucro:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y) = -6x - 2y + 120 & \Rightarrow \\ \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y) = -6y - 2x + 200 & \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 3x + y = 60 \\ 3y + x = 100 \end{cases} \Rightarrow x = 10 \text{ e } y = 30.$$

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y) = -6 < 0 \quad \text{e} \quad H(x, y) = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 32 > 0 \right)$$

Logo, a produção que maximiza o lucro é $x = 10$ e $y = 30$.

13. Sejam $P = (x, y, 12 - 3x - 2y) \in$ plano
$O = (0, 0, 0)$
$Q = (1, 1, 1)$

Distância entre os pontos:

$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + (12 - 3x - 2y)^2}$ e

$d(P, Q) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (11 - 3x - 4y)^2}$.

Devemos minimizar a função:

$g(x, y) = x^2 + y^2 + (12 - 3x - 2y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (11 - 3x - 2y)^2$

$g(x, y) = 20x^2 + 10y^2 + 24xy - 140x - 94y + 267$

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 40x + 24y - 140$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 20y + 24x - 94.$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 40x + 24y = 140 \\ 20y + 24x = 94 \end{cases}$

temos $x = \dfrac{34}{14}$, $y = \dfrac{25}{14}$ e $z = \dfrac{16}{14}$.

$H(x, y) = \begin{vmatrix} 40 & 24 \\ 24 & 20 \end{vmatrix} > 0$ $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) > 0$. Logo, $x = \dfrac{34}{14}$ e $y = \dfrac{25}{14}$ é ponto de mínimo global de g.

Portanto, $P = \left(\dfrac{34}{14}, \dfrac{25}{14}, \dfrac{16}{14}\right)$.

14. Seja $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.
Plano tangente ao gráfico de f.

$z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$, ou seja,

$z - 1 + x_0^2 + y_0^2 = -2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0).$

Daí, $z = -2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 + 1.$

A seguir vamos determinar o volume do tetraedro determinado pelo plano tangente e pelos planos coordenados. Temos

$x = 0$ e $y = 0 \Rightarrow z = x_0^2 + y_0^2 + 1,$

$x = 0$ e $z = 0 \Rightarrow y = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2y_0}$ e

$y = 0$ e $z = 0 \Rightarrow x = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2x_0}.$

Da Geometria Analítica sabemos que o volume do tetraedro é $\dfrac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo. Portanto,

$$V = \frac{1}{6}\,\frac{(x_0^2 + y_0^2 + 1)^3}{4x_0y_0} = \frac{(x_0^2 + y_0^2 + 1)^3}{24x_0y_0}.$$

Devemos minimizar a função volume:

$$V(x,\ y) = \frac{(x^2 + y^2 + 1)^3}{24\,xy}.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,(x,\ y) = \frac{(x^2 + y^2 + 1)^2\ (5x^2 - y^2 - 1)}{24\,x^2 y} \text{ e}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x,\ y) = \frac{(x^2 + y^2 + 1)^2\ (5y^2 - x^2 - 1)}{24\,x^2 y}.$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 5\,x^2 - y^2 = 1 \\ 5y^2 - x^2 = 1 \end{cases}$

temos $x = \pm\frac{1}{2}$ e $y = \pm\frac{1}{2}$.

Mas $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, portanto, $(x_0,\ y_0,\ z_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Equação do plano tangente que forma com os planos coordenados um tetraedro de volume mínimo:

$$z = -2x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 + 1, \text{ ou seja, } z + x + y = \frac{3}{2}.$$

20. Não, pois (0, 0) é o único ponto crítico de $f(x,\ y) = x^2(1 - y)^3 + y^2$, é ponto de mínimo local mas não é ponto de mínimo global. (**Observação.** Esta função foi sugerida pelo Professor Luiz Augusto Fernandes do IME-USP.)

Exercícios 16.4

1. *d*) Seja $f(x,\ y) = xy$ em $A = \{(x,\ y) \text{ e } \mathbb{R}^2 x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ e } 2x + y \leqslant 5\}$.

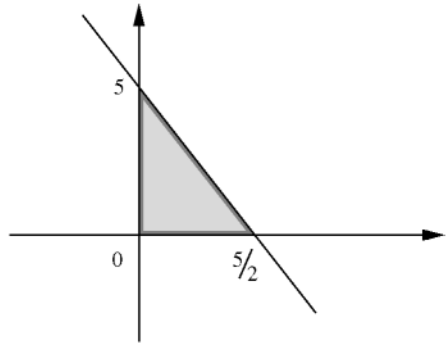
O teorema de Weierstrass garante que f assume em A valor máximo e valor mínimo pois f é contínua e A é compacto.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,\ y) = y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\,(x,\ y) = x$$

O único ponto crítico é (0, 0), que não pertence ao interior de A.

Portanto, os valores máximo e mínimo de f, em A, são atingidos na fronteira de A.

Análise dos pontos de fronteira:



$f(x, 0) = 0$ em $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}$

$f(0, y) = 0$ em $0 \leqslant y \leqslant 5$

$g(x) = f(x, 5 - 2x) = x(5 - 2x) = 5x - 2x^2$

$g'(x) = 5 - 4x$. Daí, $5 - 4x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow y = 5 - 2x = \dfrac{5}{2}$

$g''(x) = -4 < 0$

$f\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{25}{8}$.

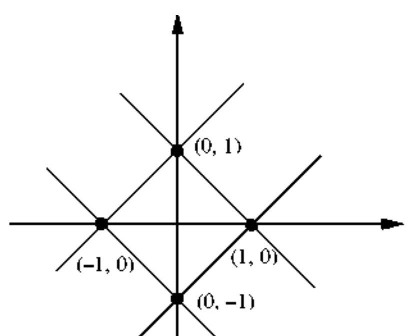
Concluímos que:

— O valor mínimo é 0 e é atingido nos pontos $(x, 0)$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}$ e nos pontos $(0, y)$, $0 \leqslant y \leqslant 5$.

— O valor máximo é $\dfrac{25}{8}$ atingido em $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{2}\right)$.

f) Seja $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leqslant 1\}$.

Como f é contínua e A compacto, f assume em A valor máximo e valor mínimo (teorema de Weierstrass).



$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x$. $(0, 0)$ é o único ponto crítico.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0$ e $H(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$.

Logo, $f(0, 0) = 0$ é valor mínimo global de f. (Veja Exercício 2, Seção 16.3.)

Vamos analisar, agora, o que ocorre na fronteira. Sobre o segmento de extremidades (0, 1) e (1, 0) os valores de f são dados por $g(x) = f(x, 1 - x)$, ou seja, $g(x) = 5x^2 - 6x + 2$, com $0 \leqslant x \leqslant 1$, cujo gráfico é um arco de parábola com concavidade para cima, logo, sobre este lado o valor máximo deverá ocorrer em uma das extremidades (ou em ambas). De $g(1) = 1$ e $g(0) = 2$, segue que sobre este lado o valor máximo é 2 e ocorre em (0, 1). De forma análoga, conclui-se que sobre os outros lados o valor máximo deverá ocorrer, também, nos vértices. Calculando os valores de f nos vértices: $f(1, 0) = 1$; $f(0, 1) = 2$; $f(-1, 0) = 1$ e $f(0, -1) = 2$.

O valor máximo é 2 sendo atingido nos pontos (0, 1) e (0, −1).

3. Seja $T(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant x \text{ e } 2y + x \leqslant 4\}$.

Como T é uma função contínua e A compacto, então, T assume em A valor máximo e valor mínimo. Temos

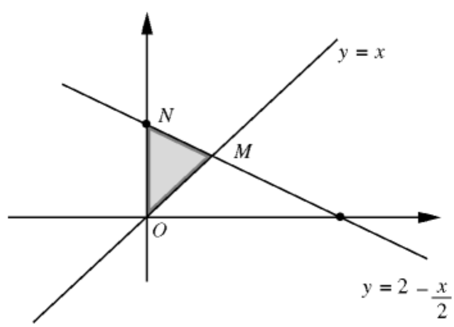
$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = -2x \text{ e}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

(0, 0) é o único ponto crítico. Temos $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, y) = -2 < 0$ e $H(0, 0) = 4 > 0$, logo, (0, 0) é um ponto de temperatura máxima em A.

E mais $T(0, 0) = 4$ é a temperatura máxima.

Vamos analisar o comportamento da função na fronteira de A:



No segmento $\overline{OM}$ ($y = x$ e $0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$).

$F(x) = T(x, x) = 4 - 2x^2$
$F'(x) = -4x$. O ponto (0, 0) é de máximo e $T(0, 0) = 4$.

A função é decrescente em $0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$ e

$T\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9}$ (no vértice M).

No segmento $\overline{MN}$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant x$ e $y = 2 - \frac{x}{2}$):

$$F(x) = T\left(x, 2 - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}(-5x^2 + 8x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{4}(-10x + 8) \Rightarrow -10x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{8}{5}.$$

$F''(x) = -\frac{5}{2} < 0$. $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ é ponto de máximo no segmento $\overline{MN}$.

$T\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{4}{5}$

No segmento $\overline{ON}$ ($x = 0$ e $0 \leqslant y \leqslant 2$)
$F(y) = T(0, y) = 4 - 2y^2$
$F'(y) = -8y$. $(0, 0)$ dá temperatura máxima igual a 4. A função $F'(y)$ é sempre negativa em $0 \leqslant y \leqslant 2$. Portanto a função F é estritamente decrescente em $0 \leqslant y \leqslant 2$, com valor máximo em $(0, 0)$ e valor mínimo em $(0, 2)$.

Logo, $T(0, 2) = 0$ é a menor temperatura e $P = (0, 2)$ é o ponto de menor temperatura.

Exercícios 16.5

1. *a*) Sejam $f(x, y) = 3x + y$ e $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$
Vamos achar os extremantes de f em $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ pelo método dos multiplicadores de Lagrange.

Como g é de classe C^1 e $\nabla g(x, y) = (2x, 4y) \neq (0, 0)$ em B, temos que os candidatos a extremantes locais são os (x, y) que tornam compatível o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3, 1) = \lambda\ (2x, 4y) \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda x = 3 \\ 4\lambda y = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Como $\lambda \neq 0$ temos $x = \frac{3}{2\lambda}$ e $y = \frac{1}{4\lambda}$.
Substituindo em $x^2 + 2y^2 = 1$ segue:

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{2}{16\lambda^2} = 1 \Rightarrow 16\lambda^2 = 38 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{38}}{4}$$

Logo, os candidatos a extremantes locais são:

$$\left(\frac{3\sqrt{38}}{19}, \frac{\sqrt{38}}{38}\right) \text{ e } \left(-\frac{3\sqrt{38}}{19}, -\frac{\sqrt{38}}{38}\right)$$

Como B é compacto e $f\left(\frac{3\sqrt{38}}{19}, \frac{\sqrt{38}}{38}\right) > f\left(-\frac{3\sqrt{38}}{19}, -\frac{\sqrt{38}}{38}\right)$ resulta que

$\left(\frac{3\sqrt{38}}{19}, \frac{\sqrt{38}}{38}\right)$ é ponto de máximo e $\left(-\frac{3\sqrt{38}}{19}, -\frac{\sqrt{38}}{38}\right)$ é ponto de mínimo.

***d*)** Sejam $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ e $g(x, y) = xy - 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

Vamos encontrar os extremantes de f em:

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0, x > 0 \text{ e } y > 0\}$ utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Como g é de classe C^1 e $\nabla g(x, y) = (y, x) \neq (0, 0)$ em B resulta que os extremantes possíveis são os (x, y) que tornam compatível o sistema.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x, 8y) = \lambda(y, x) \\ xy - 1 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema $\lambda = 4$; $x = \sqrt{2}$ e $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

O único candidato é $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e verifica-se, por inspeção, que é um ponto de mínimo.

(O valor da função f sobre a restrição é dada por $g(x) = f\left(x,\ \dfrac{1}{x}\right)$, ou seja, $g(x) = x^2 + \dfrac{4}{x^2}$, $x > 0$, cuja concavidade é voltada para cima, logo, para $x = \sqrt{2}$ o valor de g é mínimo. **Outro modo**. Como as curvas de nível de f são elipses com centros na origem, o valor de f aumenta à medida que se afasta da origem, então, o menor valor de f sobre a restrição $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$ deverá ocorrer no ponto em que a curva de nível de f tangencia a hipérbole.)

j) Sejam $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ e $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$.

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$

Como g é de classe C^1 e $\nabla g(x, y) = (2x, 4y) \neq (0, 0)$ em B resulta que os candidatos a extremantes locais são os (x, y) que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x - 2y, 6y - 2x) = \lambda(2x, 4y) \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 2\lambda x & \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{x - y}{x} \quad (1) \\ 6y - 2x = 4\lambda y & \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{3y - x}{2y} \quad (2) \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

De (1) e (2): $\dfrac{x - y}{x} = \dfrac{3y - x}{2y} \quad \Rightarrow \ 2xy - 2y^2 = 3xy - x^2$

$$\Rightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 8y^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2y \text{ ou } x = -y.$$

Substituindo em (3):

$$x^2 + 2x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 1 \quad \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$4y^2 + 2y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 6y^2 = 1 \quad \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Como f é contínua e B compacto, basta comparar os valores de f nos pontos encontrados:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2; \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2;$$

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ são pontos de máximo e $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ são pontos de mínimo.

2. Sejam $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ e $g(x, y) = xy - 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \ \ \nabla g(x, y) \\ xy - 1 = 0,\ x > 0 \text{ e } y > 0 \end{cases}$, ou seja,

$$\begin{cases} (2x, 32y) = \lambda(y, x) \\ xy - 1 = 0 \quad (1) \end{cases} \Rightarrow 2x = \lambda y \quad \text{e} \quad 32y = \lambda x.$$

Logo, $\lambda = \dfrac{2x}{y}$ e $\lambda = \dfrac{32y}{x}$. Daí, $\dfrac{2x}{y} = \dfrac{32y}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 = 32y^2 \Rightarrow x^2 - 16y^2 = 0 \Rightarrow x = 4y.$

Substituindo em (1):

$$4y^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \quad (y > 0) \Rightarrow x = 2\ (x > 0).$$

Ponto de tangência $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ e

$$f\left(2, \frac{1}{2}\right) = 2^2 + 16\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8.$$

Curva de nível: $x^2 + 16y^2 = 8$.

4. Vamos minimizar a função $d(x, y) = \sqrt{(x-14)^2 + (y-1)^2}$ que nos dá a distância de um ponto $P(x, y)$ até $(14, 1)$, sujeita à restrição $g(x, y) = y - x^2 = 0$.

Para simplificar cálculos, podemos minimizar o quadrado da distância.

Seja $f(x, y) = (x - 14)^2 + (y - 1)^2$.

$\nabla f(x, y) = (2(x - 14), 2(y - 1))$ e $\nabla g(x, y) = (-2x, 1)$.

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \nabla g(x, y) \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x - 14) = -2\lambda x \\ 2\,(y - 1) = \lambda \\ y - x^2 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Logo, $\dfrac{14 - x}{x} = 2(y - 1) \Rightarrow y = \dfrac{14 + x}{2x}$.

Substituindo em ①:

$$\frac{14+x}{2x}-x^2=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3-x-14=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \text{ (as outras raízes são complexas)}$$
e $y = 4$.

Portanto, (2, 4) é o ponto procurado.

6. Sejam $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ e $g(x, y, z) = x + 2y + 3z - 4$.

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z) \\ x+2y+3z-4=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (2x\,,2y,4z)=\lambda(1,2,3) \\ x+2y+3z-4=0 \quad ① \end{cases}$$

Então, $2x = \lambda$; $2y = 2\lambda$; $4z = 3\lambda$.

Substituindo os valores de x, y, z, em função de λ, em ①.

$$\frac{\lambda}{2}+2\lambda+\frac{9\lambda}{4}-4=0 \quad \Rightarrow \quad 19\lambda=16 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{16}{19}.$$

Portanto, $x=\frac{8}{19}$; $y=\frac{16}{19}$ e $z=\frac{12}{19}$

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2=\frac{64+256+288}{361}=\frac{608}{361}=\frac{32}{19}.$$

Superfície de nível: $x^2+y^2+2z^2=\frac{32}{19}$.

Ponto de tangência $\left(\frac{8}{19},\frac{16}{19},\frac{12}{19}\right)$.

8. Sejam $P(x, y, z)$ e $O(0, 0, 0)$.
Consideremos a distância entre P e O:

$$d(P,O)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Vamos minimizar a função $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ com a restrição $g(x, y, z) = x + 2y - 3z - 4 = 0$.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z) \\ x+2y-3z-4=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (2x,2y,2z)=\lambda(1,2,-3) \\ x+2y-3z-4=0. \quad ① \end{cases}$$

Temos $x=\frac{\lambda}{2}$; $y=\lambda$ e $z=-\frac{3\lambda}{2}$.

Substituindo em ①:

$$\frac{\lambda}{2}+2\lambda+\frac{9\lambda}{2}-4=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{4}{7}$$

Então, $x = \dfrac{2}{7}$, $y = \dfrac{4}{7}$ e $z = -\dfrac{6}{7}$.

10) Sejam $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ e $h(x, y, z) = x + y + z - 1$.

Temos:

$$\nabla g(x, y, z) \wedge \nabla h(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\nabla g(x, y, z) \wedge \nabla h(x, y, z) = (2y - 2z)\,\vec{i} + (2z - 2x)\,\vec{j} + (2x - 2y)\,\vec{k} \neq \vec{0}$$

em $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } x + y + z = 1\}$ (B compacto)
Portanto, os candidatos a extremantes locais são os (x, y, z) que tornam compatível o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1, 2, 3) = \lambda(2x, 2y, 2z) + \mu(1, 1, 1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu & ① \\ 2 = 2\lambda y + \mu & ② \\ 3 = 2\lambda z + \mu & ③ \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & ④ \\ x + y + z = 1 & ⑤ \end{cases}$$

De ①, ②, ③ segue: ($\lambda \neq 0$)

$$1 - \mu = 2\lambda x \Rightarrow x = \frac{1 - \mu}{2\lambda}$$

$$2 - \mu = 2\lambda y \Rightarrow y = \frac{2 - \mu}{2\lambda}$$

$$3 - \mu = 2\lambda z \Rightarrow z = \frac{3 - \mu}{2\lambda}.$$

Substituindo em ⑤ segue: $\dfrac{1 - \mu}{2\lambda} + \dfrac{2 - \mu}{2\lambda} + \dfrac{3 - \mu}{2\lambda} = 1.$

Então, $\mu = \dfrac{6 - 2\lambda}{3}$; $x = \dfrac{-3 + 2\lambda}{6\lambda}$; $y = \dfrac{1}{3}$ e $z = \dfrac{3 + 2\lambda}{6\lambda}$.

Substituindo em ④ segue: $\left(\dfrac{-3 + 2\lambda}{6\lambda}\right)^2 + \dfrac{1}{9} + \left(\dfrac{3 + 2\lambda}{6\lambda}\right)^2 = 4.$

Daí, $144\lambda^2 - 12\lambda^2 - 18 = 0 \quad \Rightarrow 132\lambda^2 = 18 \;\Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{\dfrac{3}{22}}$.

Para $\lambda = \sqrt{\dfrac{3}{22}}$, temos

$$x = \frac{-3\sqrt{22} + 2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{66}}{6};\ z = \frac{3\sqrt{22} + 2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{66}}{6}.$$

Para $\lambda = -\sqrt{\dfrac{3}{22}}$, temos

$$x = \frac{2 + \sqrt{66}}{6},\ y = \frac{1}{3} \text{ e } z = \frac{2 - \sqrt{66}}{6}.$$

Logo, $\left(\dfrac{2 - \sqrt{66}}{6}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2 + \sqrt{66}}{6}\right)$ maximiza f.

13. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = x^2 - 6xy - 7y^2 + 80$.

Vamos minimizar $f(x, y)$ sujeito a restrição $g(x, y) = 0$.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ x^2 - 6xy - 7y^2 + 80 = 0 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} (2x, 2y) = \lambda(2x - 6y, -6x - 14y) & ① \\ x^2 - 6xy - 7y^2 + 80 = 0 & ② \end{cases}$$

De ①: $2x = \lambda(2x - 6y) \Rightarrow \lambda = \dfrac{2x}{2x - 6y} \Rightarrow \lambda = \dfrac{x}{x - 3y} \quad (x \neq 3y)$

$$2y = \lambda(-6x - 14y) \Rightarrow \lambda = \frac{y}{-3x - 7y} \qquad (-3x \neq 7y)$$

Logo, $\dfrac{x}{x - 3y} = \dfrac{y}{-3x - 7y} \Rightarrow -3x^2 - 8xy + 3y^2 = 0$

$$x = \frac{8y \pm \sqrt{64y^2 + 36y^2}}{-6} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y}{3} \\ x = -3y \end{cases}$$

Substituindo $x = \dfrac{y}{3}$ em ②:

$$\frac{y^2}{9} - 2y^2 - 7y^2 + 80 = 0 \Rightarrow -80y^2 = -720 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3 \Rightarrow x = \pm 1$$

Se $x = -3y$, então $y \notin \mathbb{R}$.

Logo, os pontos da curva mais próximos da origem são (1, 3) e (−1, −3).

Agora, os vetores (1, 3) e (−3, 1) são ortogonais $[(1, 3) \cdot (-3, 1) = 0]$ e $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ e $\vec{v} = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ são os versores de (1, 3) e (−3, 1).

Fazendo uma mudança de coordenadas:

$$(x, y) = u \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)}_{\vec{u}} + v \underbrace{\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)}_{\vec{v}}$$

(o vetor (x, y) escrito em outra base).

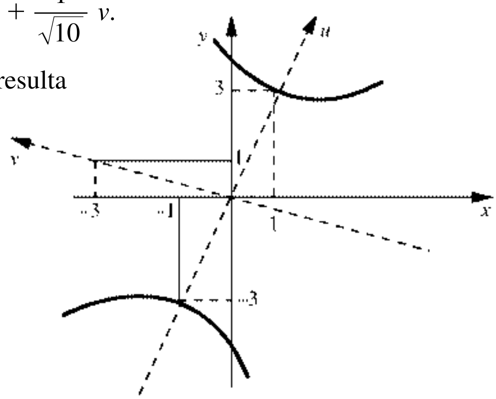
Logo,

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}\, u - \frac{3}{\sqrt{10}}\, v \quad \text{e} \quad y = \frac{3}{\sqrt{10}}\, u + \frac{1}{\sqrt{10}}\, v.$$

Substituindo em $x^2 - 6xy - 7y^2 + 80 = 0$ resulta

$$\frac{u^2}{10} - \frac{v^2}{40} = 1$$

Logo, a mudança de coordenadas proposta transforma a equação dada na equação $\frac{u^2}{10} - \frac{v^2}{40} = 1$ que é uma hipérbole.



23. Sejam $T(x, y, z) = 100\, x^2yz$ e $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$.

Os únicos pontos críticos no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, que é um conjunto compacto, são os pontos $(0, y, z)$, $(x, 0, z)$ e $(x, y, 0)$ e nestes pontos a temperatura é zero. Para determinar os candidatos que estão na fronteira da esfera vamos utilizar os multiplicadores de Lagrange.

Vamos, portanto, procurar (x, y, z) que torne compatível o sistema:

$$\begin{cases} \nabla T(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (200xyz,\ 100x^2z,\ 100x^2y) = \lambda(2x, 2y, 2z) & ① \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & ② \end{cases}$$

De ① segue:

$200xyz = 2\lambda x \Rightarrow yz = \dfrac{\lambda}{100}$

$100x^2z = 2\lambda y \Rightarrow x^2z = \dfrac{\lambda y}{50} \Rightarrow y^2 = z^2 \quad \text{e} \quad x^2 = 2y^2$

$100x^2y = 2\lambda z \Rightarrow x^2y = \dfrac{\lambda z}{50}$

Substituindo em ②,

$2y^2 + y^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 4y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad z \pm 1$ e $\lambda = 100$. Logo:

$(\sqrt{2}, 1, 1)$ é ponto de máximo e $T(x, y, z) = 100 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 200$ é a temperatura máxima.
$(-\sqrt{2}, -1, -1)$ é ponto de mínimo e $T(x, y, z) = -200$ é a temperatura mínima.

25. Sejam $h(x, y) = x^2 + 2y^2 - 6$ e $g(x, y) = x + y - 4$

Os vetores $\nabla h(x, y)$ e $\nabla g(x, y)$ devem ser paralelos. Vamos calcular (x, y) que torne compatível o sistema:

$$\begin{cases} \nabla h(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ h(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x, 4y) = \lambda(1, 1) \\ x^2 + 2y^2 - 6 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda & \Rightarrow 2x = 4y \Rightarrow x = 2y \\ 4y = \lambda & \text{Daí,} \\ x^2 + 2y^2 - 6 = 0 & 4y^2 + 2y^2 = 6y^2 \Rightarrow y = \pm 1 \\ & x = \pm 2 \end{cases}$$

Logo $P(2, 1)$ pertence à elipse. ($P(-2, -1)$ não vai atender a condição do problema de minimização da distância.)

Seja $Q(x, y)$ pertencente à reta.

$d(P, Q) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$

Vamos minimizar $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$. Procurando (x, y) que torne compatível o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2(x-2), 2(y-1)) = \lambda(1, 1) \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 4 = \lambda & \Rightarrow \quad 2x - 4 = 2y - 2 \quad \Rightarrow \quad y = x - 1 \\ 2y - 2 = \lambda & \text{Daí,} \\ x + y = 4 & 2x - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{5}{2} \quad \text{e} \quad y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Logo, $P(2, 1)$ e $Q\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ satisfazem a condição do problema.