Capítulo 17

Exercícios 17.2

1. ***a***) Sejam

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solução *LSQ*:

$$x = \frac{\vec{b} \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2} = \frac{14}{15}$$

2. Sejam $P = (2, 1, 3)$ e r: $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$.

O ponto procurado é $(3t_1, t_1, 2t_1)$, onde t_1 é a solução *LSQ* do sistema

$$\begin{cases} 3t = 2 \\ t = 1 \\ 2t = 3. \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{(3, 1, 2) \cdot (2, 1, 3)}{(3, 1, 2) \cdot (3, 1, 2)} = \frac{13}{14}.$$

3. Sejam $P = (1, 1, 1)$ e r: $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t + 2 \end{cases}$

O ponto procurado é $(t_1 + 1, 2t_1, t_1 + 2)$, onde t_1 é a solução *LSQ* do sistema

$$\begin{cases} t + 1 = 1 \\ 2t = 1 \\ t + 2 = 1 \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} t = 0 \\ 2t = 1 \\ t = -1. \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{(1, 2, 1) \cdot (0, 1, -1)}{(1, 2, 1) \cdot (1, 2, 1)} = \frac{1}{6}.$$

Exercícios 17.3

1.

***a*)** Sejam $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

Os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são l.i.: o sistema será compatível determinado.
Escrevendo S na forma vetorial:

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = \vec{b}.$$

A solução *LSQ* de S é a solução do sistema auxiliar:

$$\text{S.A.} \begin{cases} x\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + y\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = \vec{b} \cdot \vec{v}_1 \\ x\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + y\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b} \cdot \vec{v}_2 \end{cases}$$

onde $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 3$; $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 2$; $\vec{b}\ \vec{v}_1 = 6$; $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 6$ e $\vec{b} \cdot \vec{v}_2 = 7$

$$\text{S.A.} \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2x + 6y = 7 \end{cases} \qquad \text{cuja solução é } \left(\frac{11}{7}, \frac{9}{14}\right)$$

Solução *LSQ* é $\left(\frac{11}{7}, \frac{9}{14}\right)$. [Não atende ao sistema no sentido habitual.]
No sentido habitual o sistema proposto não admite solução (da Álgebra Linear: o posto da matriz dos coeficientes é diferente do posto da matriz aumentada).

***b*)** Seja o sistema: $x\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\\1\end{pmatrix}$.

Na forma vetorial:

$$x\ \vec{v}_1 + y\ \vec{v}_2 = \vec{b}$$

$$\text{S.A.} \begin{cases} x\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + y\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = \vec{b} \cdot \vec{v}_1 \\ x\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + y\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b} \cdot \vec{v}_2 \end{cases}$$

onde $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 15$; $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -3$; $\vec{b} \cdot \vec{v}_1 = 12$; $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 10$ e $\vec{b} \cdot \vec{v}_2 = 7$.

$$\text{Portanto, S.A.:} \begin{cases} 15x - 3y = 12 \\ -3x + 10y = 7 \end{cases}, \qquad \text{cuja solução é } (1, 1).$$

A solução, no sentido *LSQ*, é (1, 1), que também é solução do sistema no sentido habitual.

***c*)** Seja o sistema:

$$x\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix} \quad \text{na forma vetorial: } x\,\vec{v}_1+y\,\vec{v}_2=\vec{b}\,.$$

Os vetores v_1 e v_2 são l.d.: o sistema admite uma infinidade de soluções *LSQ* (Sistema compatível indeterminado).

Como $\vec{v}_1=2\,\vec{v}_2$ segue $2x\,\vec{v}_2+y\,\vec{v}_2=\vec{b}$

Daí, $\underbrace{(2x+y)}_{t}\vec{v}_2=\vec{b}$. Então, $t\,\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2=\vec{b}\cdot\vec{v}_2$ e daí

$t=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}=\dfrac{9}{7}$. Logo, as soluções *LSQ* são todos os pares (x, y) tais que $2x+y=\dfrac{9}{7}$.
No sentido habitual, o sistema não admite solução.

2. Sejam α: $\begin{cases}x=2u+v\\y=u-v\\z=u+v\end{cases}$ e $B=(3, 0, 1)$.

O ponto procurado é $(2u_1+v_1, u_1-v_1, u_1+v_1)$, onde (u_1, v_1) é a solução *LSQ* do sistema

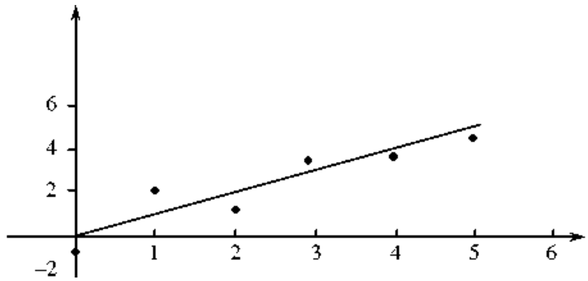
$\begin{cases}2u+v=3\\u-v=0\\u+v=1\end{cases}$ que é equivalente a $u\vec{v}_1+v\vec{v}_2=\vec{b}$.

Então, (u_1, v_1) é a solução do sistema auxiliar $\begin{cases}u\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1\ v\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1=\vec{b}\cdot\vec{v}_1\\u\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\ v\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2=\vec{b}\cdot\vec{v}_2\end{cases}$, que é equivalente a $\begin{cases}6u+2v=7\\2u+3v=4\end{cases}$. Assim, $u_1=\dfrac{13}{14}$ e $v_1=\dfrac{5}{7}$. O ponto procurado é $\left(\dfrac{36}{14}, \dfrac{3}{14}, \dfrac{23}{14}\right)$.
A distância do ponto ao plano é

$$\sqrt{\left(\frac{36}{14}-3\right)^2+\left(\frac{3}{14}\right)^2+\left(\frac{23}{14}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{126}}{14}=\frac{3\sqrt{14}}{14}.$$

Exercícios 17.4

1. *a*) O diagrama de dispersão é a representação gráfica dos pontos da tabela.



b) Reta dos mínimos quadrados.
Seja $\hat{y} = mx + q$ a reta procurada.

Temos

$$S: \begin{cases} q = -1 \\ m + q = 2 \\ 2m + q = 1{,}5 \\ 3m + q = 3{,}5 \\ 4m + q = 3{,}8 \\ 5m + q = 4{,}5 \end{cases}$$

Em forma vetorial, S: $\{m\ \vec{v}_1 + q\ \vec{v}_2 = \vec{b}$

onde $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1{,}5 \\ 3{,}5 \\ 3{,}8 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$

O sistema auxiliar é:

$$\text{S.A.: } \begin{cases} m\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + q\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = \vec{b} \cdot \vec{v}_1 \\ m\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + q\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b} \cdot \vec{v}_2 \end{cases}$$

Temos

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 55;\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 15;$

$\vec{b} \cdot \vec{v}_1 = 53{,}2;\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 6;$

$\vec{b} \cdot \vec{v}_2 = 14{,}3$

$$\begin{cases} 55m + 15q = 53{,}2 \\ 15m + 6q = 14{,}3 \end{cases}$$

Daí, $m = \dfrac{349}{350}$ e $q = -\dfrac{23}{210}$.

Portanto, $\hat{y} = \dfrac{349}{350}x - \dfrac{23}{210}$.

***c*)** Para determinar o coeficiente de determinação

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{6} (y_i - \bar{y})^2}$$

precisamos da seguinte tabela:

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
0	-1	$-0{,}1095$	6,2140	11,4467
1	2	0,8876	2,2371	0,1467
2	1,5	1,8847	0,2486	0,7802
3	3,5	2,8819	0,2486	1,2470
4	3,8	3,8790	2,2371	2,0070
5	4,5	4,8762	6,2145	4,4804

onde $\hat{y} = \dfrac{349}{350}x - \dfrac{23}{210}$

$$\bar{y} = \frac{-1 + 2 + 1{,}5 + 3{,}5 + 3{,}8 + 4{,}5}{6} = 2{,}3833.$$

Coeficiente de determinação:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{6} (y_i - \bar{y})^2} = \frac{17{,}399}{20{,}1082} \cong 0{,}8653$$

2. *a*) Reta dos mínimos quadrados:

Seja $\hat{y} = mx + q$

Temos

$$S: \begin{cases} -6m + q = 2 \\ -5m + q = 2{,}4 \\ -4m + q = 1{,}9 \\ -3m + q = 1{,}8 \\ -2m + q = 2{,}1 \\ -\ \ m + q = 2{,}2 \end{cases}$$

ou

$$m\underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + q\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}4 \\ 1{,}9 \\ 1{,}8 \\ 2{,}1 \\ 2{,}2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Na forma vetorial $m\,\vec{v}_1 + q\,\vec{v}_2 = \vec{b}$.

O sistema auxiliar é:

S.A.: $\begin{cases} m\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + q\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b} \cdot \vec{v}_1 \\ m\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + q\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b} \cdot \vec{v}_2 \end{cases}$

onde $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 91$; $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -21$; $\vec{b} \cdot \vec{v}_1 = -43{,}4$; $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 6$ e $\vec{b} \cdot \vec{v}_2 = 12{,}4$.

Então, S.A.: $\begin{cases} 91m - 21\,q = -43{,}4 \\ -21m + 6q = 12{,}4 \end{cases}$

A solução *LSQ* é $m = 0$ e $q = \dfrac{31}{15}$

$\hat{y} = \dfrac{31}{15}$ é a reta dos mínimos quadrados.

***b*)** Para $x = 0$, temos $\hat{y} = \dfrac{31}{15}$.

***c*)** $\bar{y} = \dfrac{2 + 2{,}4 + 1{,}9 + 1{,}8 + 2{,}1 + 2{,}2}{6} = \dfrac{12{,}4}{6} = \dfrac{124}{60} = \dfrac{31}{15}$.

Logo, $\hat{y}_i - \bar{y} = 0$. Portanto, $R^2 = 0$.