CAPÍTULO 5

Exercícios 5.1

1.

c) $\dfrac{dx}{dt} - x = \cos t \qquad (a = -1 \text{ e } f(t) = \cos t)$

$x = ke^t + e^t \displaystyle\int e^{-t} \cos t \, dt.$

Como $\displaystyle\int e^{-t} \cos t \, dt = \frac{1}{2}\left[e^{-t} \operatorname{sen} t - e^{-t} \cos t\right]$ segue

$x = ke^t + \dfrac{e^t}{2}\left[e^{-t} \operatorname{sen} t - e^{-t} \cos t\right]$ e, portanto,

$x = ke^t + \dfrac{\operatorname{sen} t}{2} - \dfrac{\cos t}{2}.$

q) $\dfrac{dT}{dt} - 3T = 2 \ (a = -3 \text{ e } f(t) = 2) \iff T = ke^{3t} + e^{3t} \underbrace{\displaystyle\int e^{-3t} \cdot 2 \, dt}_{-\frac{2}{3} e^{-3t}}.$

Logo, $T = k\, e^{3t} - \dfrac{2}{3}.$

2. $\dfrac{dp}{dt} = kp$, pois a taxa de aumento é proporcional ao número presente.

$\dfrac{dp}{dt} = kp \text{ e } p(0) = p_0 \iff p = p_0 \ p_0 e^{kt}.$

Quando $t = 2$, temos $p = 2\,p_0$.

Então, $2p_0 = p_0\, e^{2k} \Rightarrow \qquad k = \ln \sqrt{2}$. Portanto, $p = p_0 e^{t \ln \sqrt{2}} = p_0\, (\sqrt{2}\,)^t.$

Ao final de 6 horas, temos:

$p = p_0\, (\sqrt{2}\,)^6 \qquad \Rightarrow \quad p = 8p_0.$

4.

a) $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L}\, i = \dfrac{E(t)}{L} \left(a = \dfrac{R}{L} \quad \text{e} \quad f(t) = \dfrac{E(t)}{L}\right).$

$$i = ke^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t}\int e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\overbrace{E(t)}^{E_0}}{L}\,dt, \text{ daí}$$

$$i = ke^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t}\cdot\frac{E_0}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}t} \text{ e, portanto,}$$

$$i = ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R}.$$

De $i = 0$ para $t = 0$, segue $k = -\frac{E_0}{R}$. Portanto, $i = -\frac{E_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$.

b) Consideremos $L = 2$; $R = 10$; $E(t) = 110 \text{ sen } 120\pi t$ e $i = 0$ para $t = 0$.

$$\frac{di}{dt} + 5i = 55 \text{ sen } 120\pi t \quad (a = 5 \text{ e } f(t) = 55 \text{ sen } 120\pi t)$$

$$i = ke^{-5t} + e^{-5t}\int e^{5t}\, 55 \text{ sen } 120\pi t\; dt.$$

Integrando por partes, temos

$$i = ke^{-5t} + \left(\frac{1}{1+576\pi^2}\right)\left(-264\pi \cos 120\pi t + 11 \text{ sen } 120\pi t\right).$$

Como $i = 0$ para $t = 0$, $k = \frac{264\pi}{1+576\pi^2}$. Portanto,

$$i = \left(\frac{1}{1+576\pi^2}\right)\left(264\pi e^{-5t} - 264\pi \cos 120\pi t + 11 \text{ sen } 120\pi t\right).$$

Exercícios 5.2

1.

a) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

Solução geral: $x = Ae^{3t} + Be^{-t}$.

e) $\frac{d^2x}{dt^2} - 3x = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 3 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = +\sqrt{3}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{3}$.

Solução geral: $x = Ae^{\sqrt{3}t} + Be^{-\sqrt{3}t}$.

g) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$.
Solução geral: $y = Ae^{2x} + Be^{-x}$.

h) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

Equação característica: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$. Raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.
Solução geral: $y = Ae^{-3x} + B\,xe^{-3x}$ ou $y = e^{-3x}(A + Bx)$.

m) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$
Equação característica: $\lambda^2 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Solução geral: $x = A + Bt$.

Exercícios 5.3

1.
b) $(2 + 3i)^2 = a + bi \iff 4 + 12\mathrm{i} - 9 = a + bi$. Logo,
$a = -5$ e $b = 12$.

e) $(i - 1)^4 = a + bi$
$[(i - 1)^2]^2 = (i^2 - 2i + 1)^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$.
Logo, $a = -4$ e $b = 0$.

h) $\dfrac{2+i}{3-i} = a + bi$

$$\frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6+5i-1}{10} = \frac{5i+5}{10} = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}.$$
Logo, $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = \dfrac{1}{2}$.

2.

b) $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \iff \lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

e) $\lambda^2 = -w^2$, $\quad w \in \mathbb{R} \iff \lambda = \pm\sqrt{-w^2} = \pm w\sqrt{-1}$, ou seja, $\lambda = \pm w\,i$.

Exercícios 5.4

1.

a) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}+5x=0$

Equação característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Raízes: $\lambda = -1 \pm 2i$ ($\alpha = 1$ e $\beta = 2$).

Solução geral: $x = e^{-t}\,[A \cos 2t + B \text{ sen } 2t]$.

b) $\ddot{x}+5x=0$

Equação característica: $\lambda^2 + 5 = 0$. Raízes $\lambda = \pm\sqrt{5}i$ ($\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{5}$).

Solução geral: $x = A\cos\sqrt{5}t + B\,\text{sen}\,\sqrt{5}t$.

f) $\ddot{y}-2\dot{y}+2y=0$

Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Raízes: $\lambda = 1 \pm i$ ($\alpha = 1$ e $\beta = 2$).

Solução geral: $y = e^{t}\,[A \cos t + B \text{ sen } t]$.

p) $\ddot{y}+ay=0$, onde $a>0$ é constante.

Equação característica: $\lambda^2 + a = 0$. Raízes: $\lambda = \pm\sqrt{a}i$ ($\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{a}$).

Solução geral: $y = A\cos\sqrt{a}t + B\,\text{sen}\,\sqrt{a}t$.

q) $\ddot{y}+ay=0$, onde $a<0$ é uma constante.

As raízes da equação característica são reais: $\lambda_1 = +\sqrt{-a}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{-a}$.
Solução geral: $y = Ae^{\sqrt{-a}t} + Be^{-\sqrt{-a}t}$.

2.
b) $\ddot{x}+2\dot{x}+2x=0$, $x(0)=-1$ e $\dot{x}(0)=0$.

Equação característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Raízes: $\lambda = -1 \pm i$ ($\alpha = -1$ e $\beta = 1$).

Solução geral: $x = e^{-t}\,[A \cos t + B \text{ sen } t]$.

$x(0) = A \quad\Rightarrow\quad A = -1$.
$\dot{x}(t) = -e^{-t}\,(-\cos t + B\,\text{sen}\,t) + e^{-t}(\text{sen}\,t + B\cos t)$.
$\dot{x}(0) = B+1 \quad\Rightarrow\quad B+1=0 \quad\Rightarrow\quad B=-1$.

Solução particular que satisfaz às condições iniciais:

$x = e^{-t}\,(-\cos t - \operatorname{sen} t)$ ou seja, $x = -e^{-t}\,(\cos t + \operatorname{sen} t)$.

3. O movimento é regido pela equação
$\ddot{x} + 4x = 0$.
Equação característica: $\lambda^2 + 4 = 0$. Raízes: $\lambda = \pm\, 2i$ ($\alpha = 0$ e $\beta = 2$).

Solução geral: $x = A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t$.

$x(0) = A \;\Rightarrow\; A = 1$.
$\dot{x} = -2 \operatorname{sen} 2t + 2B \cos 2t$.

$\dot{x}(0) = 2B \;\Rightarrow\; 2B = -1 \;\Rightarrow\; B = -\dfrac{1}{2}$.
Logo, $\dot{x} = -2 \operatorname{sen} 2t - \cos 2t$.

5. $\dfrac{d^2 f}{dt^2} = \dfrac{df}{dt} - f$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

Equação característica: $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Raízes: $\lambda = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \;\left(\alpha = \dfrac{1}{2} \text{ e } \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solução geral: $f = e^{\frac{t}{2}} \left(A \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} t + B \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{3}}{2} t \right)$.

$f(0) = A \;\Rightarrow\; A = 0$

$f(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(B \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{3}}{2} t \right)$

$f'(t) = \dfrac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \left(B \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{3}}{2} t \right) + e^{\frac{t}{2}} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} B \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} t \right)$

$f'(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} B \;\Rightarrow\; B = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Logo, $f(t) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} e^{\frac{t}{2}} \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{3}}{2} t$.

6. Temos $\ddot{x} = k(\dot{x} - x)$ com $\ddot{x}(0) = 2$; $\dot{x}(0) = 1$ e $x(0) = 0$. Logo,
$2 = k(1 - 0) \;\Rightarrow\; k = 2$.

Daí $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$ cuja solução geral é
$x = e^t\,(A \cos t + B \operatorname{sen} t)$.
Tendo em vista as condições iniciais, resulta $x(t) = e^t \operatorname{sen} t$.

7. Pela lei de Newton:

$$\ddot{x} = -x - c\dot{x}, \text{ ou seja, } \ddot{x} + c\dot{x} + x = 0.$$

Equação característica: $\lambda^2 + c\lambda + 1 = 0$. Raízes: $\lambda = -\dfrac{c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}$.

a) As raízes devem ser reais e distintas para que o movimento seja fortemente amortecido. Logo,
$c^2 - 4 > 0 \;\Rightarrow\; c > 2\ (c > 0)$.

b) As raízes devem ser reais e iguais para que o movimento seja criticamente amortecido. Logo,
$c^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; c = 2$ (pois $c > 0$).

c) As raízes devem ser complexas. Logo,
$c^2 - 4 < 0 \;\Rightarrow\; 0 < c < 2$

Exercícios 5.5

1.

b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 2t + 1$.

A homogênea associada é $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$.
Equação característica: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.
Solução geral da homogênea: $x_h = A\,e^{-2t} + B\,t\,e^{-2t}$.

Vamos procurar uma solução particular da equação dada.
Tentaremos $x_p = m + nt$.

Assim,
$$(m + nt)'' + 4(m + nt)' + 4(m + nt) = 2t + 1, \text{ ou seja,}$$
$$4n + 4m + 4nt = 2t + 1.$$

Devemos ter: $\begin{cases} 4n = 2 \\ 4(m+n) = 1 \end{cases}$

ou seja, $n = \dfrac{1}{2}$ e $m = -\dfrac{1}{4}$.

Logo, $x_p = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\,t$ é uma solução particular.

A solução geral será: $x = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\,t$.

d) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 8e^{2t}$.

Equação característica: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$.
Solução geral da homogênea: $x_h = Ae^{-t} + Be^{-3t}$.

Vamos procurar a solução particular da equação dada.
Tentaremos $x_p = me^{2t}$.

$(me^{2t})'' + 4\,(me^{2t})' + 3\,(me^{2t}) = 8e^{2t}$

$4me^{2t} + 8me^{2t} + 3me^{2t} = 8e^{2t} \quad \Rightarrow \quad 15m = 8 \Rightarrow m = \dfrac{8}{15}$.

Assim, $x_p = \dfrac{8}{15}e^{2t}$.

A solução geral é: $x = Ae^{-t} + Be^{-3t} + \dfrac{8}{15}e^{2t}$.

f) $\ddot{y} + 2\dot{y} = 4$.

Equação característica: $\lambda^2 + 2\lambda = 0$. Raízes: $\lambda = 0$ e $\lambda = -2$.
Solução geral da homogênea: $x_h = A + Be^{-2t}$.

Seja $x_p = mt$. Devemos ter: $(mt)'' + 2(mt)' = 4$ e, portanto, $m = 2$.

Logo, $x_p = 2t$ é solução particular.
Solução geral: $x = A + Be^{-2t} + 2t$.

l) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \cos 2t$.

Equação característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. Raízes: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
Solução geral da homogênea: $x_h = Ae^{-t} + Bte^{-t}$.

Seja $x_p = m\cos 2t + n\,\text{sen}\,2t$.
Devemos ter:
$(m\cos 2t + n\,\text{sen}\,2t)'' + 2(m\cos 2t + n\,\text{sen}\,2t)' + (m\cos 2t + n\,\text{sen}\,2t) = \cos 2t$
$-\,4m\cos 2t - 4n\,\text{sen}\,2t - 4m\,\text{sen}\,2t + 4n\cos 2t + m\cos 2t + n\,\text{sen}\,2t = \cos 2t$
$(-3m + 4n)\cos 2t + (-3n - 4m)\,\text{sen}\,2t = \cos 2t$

Portanto: $\begin{cases} -3m + 4n = 1, \text{ daí } m = -\dfrac{3}{25} \text{ e } n = \dfrac{4}{25}. \\ -3n - 4m = 0 \end{cases}$

Solução particular: $x_p = -\dfrac{3}{25}\cos 2t + \dfrac{4}{25}\,\text{sen}\,2t$.

Solução geral: $x = Ae^{-t} + Bte^{-t} - \dfrac{3}{25}\cos 2t + \dfrac{4}{25}\,\text{sen}\,2t$.

m) $\ddot{x} + 9x = \text{sen } 3t$.

Equação característica: $\lambda^2 + 9 = 0$. Raízes: $\lambda = \pm 3i$
($\alpha = 0$ e $\beta = 3$).
Solução geral da homogênea: $x_h = A \cos 3t + B \text{ sen } 3t$.

Vamos procurar uma solução particular da equação dada. Como $b = 0$ e sen $3t$ é solução da homogênea, tentaremos $x_p = mt \text{ sen } 3t + nt \cos 3t$.
Assim,
$(mt \text{ sen } 3t + nt \cos 3t)'' + 9(mt \text{ sen } 3t + nt \cos 3t) = \text{sen } 3t$
Temos:
$(mt \text{ sen } 3t + nt \cos 3t)' = m \text{ sen } 3t + 3mt \cos 3t + n \cos 3t - 3nt \text{ sen } 3t$
$(mt \text{ sen } 3t + nt \cos 3t)'' = 6m \cos 3t - 6n \text{ sen } 3t - 9mt \text{ sen } 3t - 9nt \cos 3t$

Substituindo na equação dada, resulta:

$6m \cos 3t - 6n \text{ sen } 3t = \text{sen } 3t \Rightarrow 6m = 0 \ (m = 0)$ e $-6n = 1 \left(n = -\frac{1}{6} \right)$.

Logo, $x_p = -\frac{1}{6} t \cos 3t$.

Solução geral: $x = A \cos 3t + B \text{ sen } 3t - \frac{1}{6} t \cos 3t$.

2. $\ddot{x} + w^2 x = \text{sen } wt$, onde $w \neq 0$ é um real dado.

Equação característica: $\lambda^2 + w^2 = 0$; Raízes: $\lambda = \pm wi$
($\alpha = 0$ e $\beta = w$).

Solução geral da homogênea: $x_h = A \cos wt + B \text{ sen } wt$.
Seja $x_p = mt \text{ sen } wt + nt \cos wt$ uma solução particular da equação dada (pois $b = 0$ e sen wt é solução da homogênea).
Temos:
$(mt \text{ sen } wt + nt \cos wt)' = m \text{ sen } wt + wmt \cos wt + n \cos wt - wnt \text{ sen } wt$
$(mt \text{ sen } wt + nt \cos wt)'' = 2\,wm \cos wt - 2wn \text{ sen } wt - w^2 mt \text{ sen } wt - w^2 nt \cos wt$

Substituindo na equação dada, resulta:

$2\,wm \cos wt - 2wn \text{ sen } wt = \text{sen } wt$, daí
$2\,wm = 0 \ (m = 0)$ e $-2w\,n = 1 \ \left(n = -\frac{1}{2w} \right)$.

Portanto, $x_p = -\frac{1}{2w} t \cos wt$.

Solução geral: $x = A\cos wt + B\,\text{sen}\,wt - \dfrac{1}{2w}\,t\cos wt.$

3.

a) $\ddot{x} + 4x = \cos t,\ \ x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1.$

Solução geral da homogênea: $x_h = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t$

Seja $x_p = m\cos t$ (pois $b = 0$ e $\cos t$ não é solução da homogênea).
Temos $(m\cos t)' = -m\,\text{sen}\,t$ e $(m\cos t)'' = -m\cos t$

Substituindo na equação dada:

$-m\cos t + 4m\cos t = \cos t$ e, portanto, $m = \dfrac{1}{3}.$

Solução geral: $x = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t + \dfrac{1}{3}\cos t\,.$

$x(0) = A + \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad A + \dfrac{1}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{2}{3}\,.$

$\dot{x} = -\dfrac{4}{3}\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t - \dfrac{1}{3}\,\text{sen}\,t.$

$\dot{x}\,(0) = 2B \quad \Rightarrow \ 2B = -1 \quad \Rightarrow \quad B = -\dfrac{1}{2}.$

Solução do problema: $x = \dfrac{2}{3}\cos 2t - \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2t + \dfrac{1}{3}\cos t.$

d) $\ddot{x} + 4x = 5e^{3t};\ \ x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0.$

Solução da homogênea: $x_h = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t.$

Seja $x_p = me^{3t}$. Temos $(me^{3t})' = 3me^{3t}$; $(me^{3t})'' = 9\,me^{3t}$. Daí

$9me^{3t} + 4me^{3t} = 5e^{3t} \quad \Rightarrow \quad 13\,m = 5 \quad \Rightarrow m = \dfrac{5}{13}\,.$

Solução geral da equação: $x = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t + \dfrac{5}{13}e^{3t}.$

$x(0) = A + \dfrac{5}{13} \quad \Rightarrow \quad A = -\dfrac{5}{13}$. De

$\dot{x} = \dfrac{10}{13}\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t + \dfrac{15}{13}\,e^{3t}$ segue $\dot{x}(0) = 2B + \dfrac{15}{13} \quad \Rightarrow \quad B = -\dfrac{15}{26}.$

Solução do problema: $x = -\dfrac{5}{13}\cos 2t - \dfrac{15}{26}\,\text{sen}\,2t + \dfrac{5}{13}\,e^{3t}.$

4. Seja $x_p = m \text{ sen } wt + n \cos wt.$ ①

Temos:
$(m \text{ sen } wt + n \cos wt)' = wm \cos wt - wn \text{ sen } wt$ ②

$(m \text{ sen } wt + n \cos wt)'' = -w^2 m \text{ sen } wt - w^2 n \cos wt.$ ③

Substituindo ①, ② e ③ na equação $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w_0^2 x = b \text{ sen } wt$, resulta:
$-w^2 m \text{ sen } wt - w^2 n \cos wt + 2\gamma wm \cos wt - 2\gamma wn \text{ sen } wt$
$+ w_0^2 m \text{ sen } wt + w_0^2 n \cos wt = b \text{ sen } wt$, ou seja,

$$\left[\left(w_0^2 - w^2\right)m - 2\gamma wn\right] \text{sen } wt + \left[\left(w^2 - w_0^2\right)n + 2\gamma wm\right] \cos wt = b \text{ sen } wt.$$ Daí

$$\begin{cases} \left(w_0^2 - w^2\right)m - 2\gamma wn & = b \\ 2\gamma wm + \left(w_0^2 - w^2\right)n & = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$m = \frac{b\left(w_0^2 - w^2\right)}{\left(w_0^2 - w^2\right)^2 + 4\gamma^2 w^2} \quad \text{e} \quad n = -\frac{2b\gamma w}{\left(w_0^2 - w^2\right) + 4\gamma^2 w^2}.$$

Portanto,

$$x_p = \frac{b\left(w_0^2 - w^2\right)}{\left(w_0^2 - w^2\right)^2 + 4\gamma^2 w^2} \text{ sen } wt - \frac{2b\gamma w}{\left(w_0^2 - w^2\right) + 4\gamma^2 w^2} \cos wt,$$

ou seja,

$$x_p = \frac{b}{\left(w_0^2 - w^2\right)^2 + 4\gamma^2 w^2} \left[-2\gamma w \cos wt + \left(w_0^2 - w^2\right) \text{sen } wt\right].$$