CAPÍTULO 6

Exercícios 6.3

1. Em notação vetorial:
$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b)$ $\lambda \in \mathbb{R}$ é a equação da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e é paralela à direção do vetor $\vec{v} = (a, b)$.

Portanto,
$(x, y) = (1, 2) + \lambda(-1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é a equação procurada.

3. $3x + 2y = 2$. Então, $\vec{u} = (-2, 3)$, por ser ortogonal a $\vec{n} = (3, 2)$, é paralelo à reta dada.

6. ***b***) $3x - y = 3$ é perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (3, -1)$.

7. Equação vetorial da reta que passa pelo ponto $(1, -2)$ e é paralela à reta $2x + y = 3$, é perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (2, 1)$. Logo, é paralela à direção do vetor $\vec{u} = (-1, 2)$.

Logo, $(x, y) = (1, -2) + \lambda(-1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

8. A reta $2x + y = 3$ é perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (2, 1)$.

Logo, a reta procurada é paralela à direção do vetor $\vec{n} = (2, 1)$.
Então, $(x, y) = (1, 2) + \lambda(2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, é a reta procurada.

9. ***a***) Equação do plano que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e que é perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ é $(a, b, c) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$.
Portanto:
$(2, 1, 3) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 1)] = 0$, ou seja,
$(2, 1, 3) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 2 + y - 1 + 3z - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + y + 3z = 6$.

10. ***a***) O vetor $\vec{n} = (1, 2, -1)$ é perpendicular ao plano $x + 2y - z = 3$. Logo a equação vetorial da reta que passa por $(0, 1, -1)$ e é perpendicular ao plano $x + 2y - z = 3$ é $(x, y, z) = (0, 1, -1) + \lambda(1, 2, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

12. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, daí

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{k}$$

A equação vetorial da reta que passa pelo ponto (1, 2, −1) e é paralela à direção do vetor

$\vec{u} \wedge \vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{k}$ é

$(x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(3, 0, -3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

13. ***a)*** $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (2, 1, 2)$. Temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 4\vec{k} - 3\vec{k}.$$

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Logo, $\vec{u} \wedge \vec{v} = (5, -4, -3)$ é o vetor procurado.

14. ***b)*** $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}.$

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot [(x, y, z) - (0, 1, 2)] = 0 \Rightarrow (-4, 1, 3)\,(x, y - 1, z - 2) = 0$
$\Rightarrow -4x + y - 1 + 3z - 6 = 0 \Rightarrow -4x + y + 3z = 7.$

Exercícios 6.4

2.

a) $\| \vec{u} \| = \| (1, 2) \| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

d) $\| \vec{v} \| = \left\| \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$

3. Seja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$.

$\| \vec{u} \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ e $| u_i | = \sqrt{u_i^2} \quad i = 1, 2, 3.$

Temos $u_2^2 + u_3^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geqslant u_1^2$

$\Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \geqslant \sqrt{u_1^2} \Rightarrow \| \vec{u} \| \geqslant | u_1 |$ ①

$u_1^2 + u_3^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geqslant u_2^2$

$$\Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \geqslant \sqrt{u_2^2} \quad \Rightarrow \quad \| \vec{u} \| \geqslant | u_2 | \quad ②$$

$$u_1^2 + u_2^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geqslant u_3^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \geqslant \sqrt{u_2^2} \quad \Rightarrow \quad \| \vec{u} \| \geqslant | u_3 | \quad ③$$

De ①, ② e ③ segue:

$\| \vec{u} \| \geqslant | u_i |, \; i = 1, 2, 3.$

5.

a) $\| \vec{u} \| = \| (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} \| \leqslant \| \vec{u} - \vec{v} \| + \| \vec{v} \|$

$\Rightarrow \| \vec{u} \| \leqslant \| \vec{u} - \vec{v} \| + \| \vec{v} \|$

$\Rightarrow \| \vec{u} \| - \| \vec{v} \| \leqslant \| \vec{u} - \vec{v} \|$

$\Rightarrow \| \vec{u} - \vec{v} \| \geqslant \| \vec{u} \| - \| \vec{v} \|$

b) $\| \vec{v} \| = \| (\vec{v} - \vec{u}) + \vec{u} \| \leqslant \| \vec{v} - \vec{u} \| + \| u \| = \| \vec{u} - \vec{v} \| + \| \vec{u} \|$

$\Rightarrow \| \vec{v} \| \leqslant \| \vec{u} - \vec{v} \| + \| \vec{u} \| \Rightarrow \| \vec{u} - \vec{v} \| \geqslant \| \vec{v} \| - \| \vec{u} \|$

c) Tendo em vista ***a***) e ***b***), $\| \vec{u} - \vec{v} \| \geq \big| \| \vec{u} \| - \| \vec{v} \| \big|$, pois,

$\big| \| \vec{u} \| - \| \vec{v} \| \big| = \| \vec{u} \| - \| \vec{v} \|$ ou $\big| \| \vec{u} \| - \| \vec{v} \| \big| = \| \vec{v} \| - \| \vec{u} \|.$

8. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n}.$

Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$, para todo $\vec{v}$, em particular, teremos $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{0}$, logo, $\vec{u} = \vec{0}$, pois, se pelo menos uma das coordenadas de $\vec{u}$ fosse diferente de zero, teríamos $\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 > 0$.

9. Seja $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

Então,

$\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{v})$

$= \alpha \| \vec{u} \|^2 + \beta \cdot 0 = \alpha$ (pois $\| \vec{u} \| = 1$ e

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ ortogonais).

Logo, $\alpha = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Analogamente,

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{v})$

$= \alpha \cdot 0 \;+\; \beta \;\| \vec{v} \|^2 = \beta$ (pois $\| \vec{v} \| = 1$ e $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$).

Logo, $\beta = \vec{v} \cdot \vec{w}$

11. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2)$ vetores do $\mathbb{R}^2$.

$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ é equivalente ao sistema $\begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 = w_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 = w_2 \end{cases}$.

De $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$, pois, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes (Exercício 10), segue que o sistema admite uma e apenas uma solução (α, β).

13. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores unitários e ortogonais do $\mathbb{R}^2$.

($\| \vec{u} \| = \| \vec{v} \| = 1$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$)

Consideremos a combinação linear nula $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Façamos:

$\vec{u} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = u \cdot \vec{0} = 0$. Daí,

$$\alpha\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{\| u \|^2} + \beta\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\underbrace{\| u \|^2}_{1} + \beta \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \text{ e}$$

$$\vec{v} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}}_{0} + \beta\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{\|v\|^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta\underbrace{\| v \|^2}_{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0.$$

Logo, se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha = \beta = 0$. Portanto, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i.
Do Exercício 11: se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i. então existem dois únicos reais a e b tais que
$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (1)

Agora,

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{u} = a \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{\| u \|^2 = 1} + b\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}}_{0} = a \;\Rightarrow\; a = \vec{w} \cdot \vec{u} \text{ e}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{v} = a\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{0} + b \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{\| v \|^2 = 1} = b \;\Rightarrow\; b = \vec{w} \cdot \vec{v}.$$

Substituindo em (1): $\vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{v})\, \vec{v}$.

14. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3); \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vetores l. i. do $\mathbb{R}^3$.
Dizemos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. se, quaisquer que sejam os reais α, β e γ, se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, então, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

De $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, segue:

$\alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) + \gamma(w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0)$ e daí

$(\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1, \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2, \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3) = (0, 0, 0)$.
Recaímos no sistema linear homogêneo:

$\begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3 = 0 \end{cases}$ que admite somente a solução trivial $\alpha = \beta = \gamma = 0$, se e somente se

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

18. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$

$= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$. Daí

$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$

$= u_2^2v_3^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_3^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_1^2v_1^2$

$+ u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2 - u_3^2v_3^2 - 2u_1u_2v_1v_2$

$- 2u_1u_3v_1v_3 - 2u_2u_3v_2v_3 = u_1^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$

$+ u_2^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + u_3^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$

$= \underbrace{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}_{\| \vec{u} \|^2}\underbrace{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}_{\| \vec{v} \|^2} - \underbrace{(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2}_{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$

Logo,
$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|^2 = \| u \|^2 \cdot \| v \|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ (identidade de Lagrange).

Resulta:
$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|^2 \leqslant \| \vec{u} \|^2 \cdot \| \vec{v} \|^2$

e, portanto,
$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \| \leqslant \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \|$. (Um outro modo mais rápido de resolver o problema é utilizando o Exercício 17.)