CAPÍTULO 8

Exercícios 8.1

1.

Seja $f(x, y) = 3x + 2y$.

a) $f(1, -1) = 3 \cdot 1 + 2(-1) = 1$.

d) $\dfrac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = \dfrac{3x + 2y + 2k - 3x - 2y}{k} = 2$

2. Seja $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + 2y}$.

a) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \neq 0\}$, ou seja,

$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -2y\}$.

4. $f(x, y) = ax + by$. Temos
$f(1, 0) = a \quad \Rightarrow \quad a = 2$ e
$f(0, 1) = b \quad \Rightarrow \quad b = 3$
Logo, $f(x, y) = 2a + 3b$.

5.

a) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + 2xy^2}{x^3 - y^3}$. Temos

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^3 x^3 + 2\lambda^3 xy^2}{\lambda^3 x^3 - \lambda^3 y^3} = \lambda^0 \, \frac{x^3 + 2xy^2}{x^3 - y^3}, \text{ ou seja,}$$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$. Logo,
f é homogênea de grau zero.

d) $f(x, y) = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$. Temos

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \lambda^{-2} \cdot \frac{2}{x^2 + y^2}.$$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-2} f(x, y) \Rightarrow f$ é homogênea de grau -2.

6. $f(a, b) = a$ para todo (a, b) com $a^2 + b^2 = 1$ e
f é homogênea de grau 2.

a) $f(4\sqrt{3}, 4) = f \cdot \left(8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 8 \cdot \dfrac{1}{2}\right).$

Como f é homogênea de grau 2, segue:

$$f\left(8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 \cdot \frac{1}{2}\right) = 8^2\, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3},$$

pois $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1$ e $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

c) $f(x, y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$

Como f é homogênea de grau 2 segue:

$$f(x, y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Desde que $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1,$ segue:

$$f(x, y) = (x^2+y^2) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = x\sqrt{x^2+y^2}.$$

Exercícios 8.2

4.

a) Seja $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 3$ e $A = \mathbb{R}^2$.

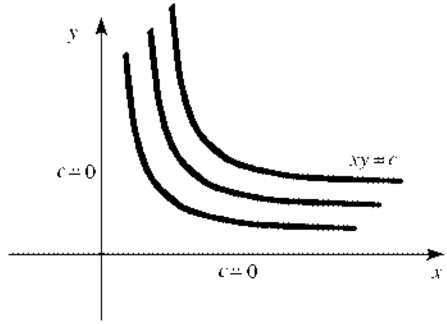
Para cada c real, a curva de nível de f correspondente a $z = c$ é $f(x, y) = c$, ou seja:
$(x-1)^2 + (y-1)^2 + 3 = c \;\Rightarrow\; (x-1)^2 + (y-1)^2 = c - 3.$

As curvas de nível de f são circunferências concêntricas de centro $(1, 1)$ e raio $\sqrt{c-3}$.
Logo, $c \geqslant 3$. Temos $c_{\text{mín}} = 3$ e $f(1, 1) = 3$ o valor mínimo de f em $A = \mathbb{R}^2$.
Não admite valor máximo.

($f(x, y) \geqslant f(1, 1)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, logo, $f(1, 1)$ é valor mínimo de f)

c) Seja $f(x, y) = xy$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0\}$.

Para cada c real, a curva de nível correspondente a $z = c$ é $xy = c$ (hipérboles).
Se $c = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$
Observamos que o valor mínimo de f é atingido quando $c = 0$ (nos eixos coordenados).
Logo, $f(x, y) = 0$ é valor mínimo atingido nos pontos $(x, 0)$, $x \geqslant 0$, ou $(0, y)$, $y \geqslant 0$. Não há valor máximo.



g) Sejam $f(x, y) = xy$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0\}$.

Vamos considerar os valores de f sobre A. Então,

$4x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{1 - 4x^2}$.

Definimos $g(x) = f(x, \sqrt{1 - 4x^2})$

Assim, $g(x) = x.\sqrt{1 - 4x^2}$ e $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

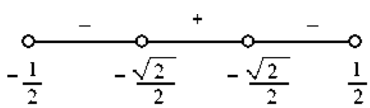
Temos

$$g'(x) = \frac{1 - 8x^2}{\sqrt{1 - 4x}}.$$

$g'(x) < 0$ em $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right[$ e

em $\left]\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right[$;

$g'(x) > 0$ em $\left]-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right[$.

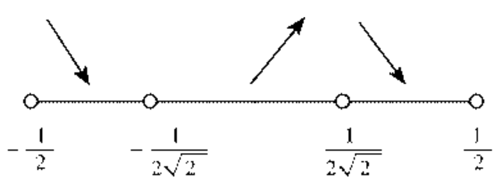


VARIAÇÃO DO SINAL DE g'

Como g é contínua no intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ segue que

g é estritamente crescente em $\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right]$.

Assim,



Portanto, $g\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}$ é valor mínimo de g e

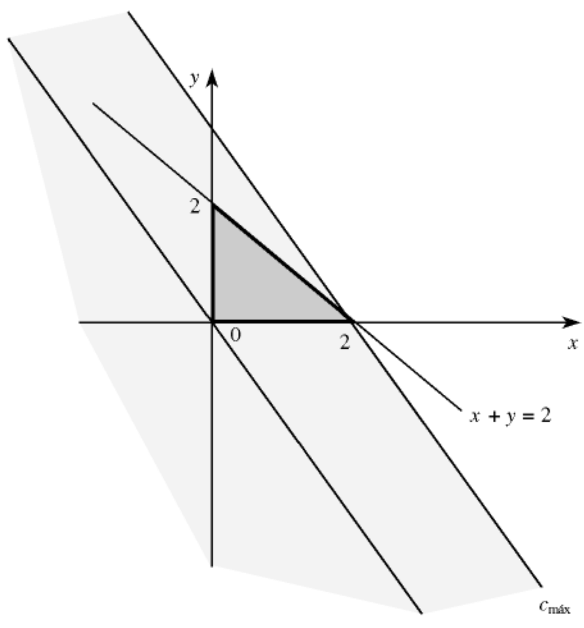
$g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$ é valor máximo de g.

(Observe que $g\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$)

5.

a) Sejam $f(x, y) = 2x + y + 3$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ e } x + y \leqslant 2\}$.

Para cada real c, a curva de nível correspondente a $z = c$ é a reta $2x + y + 3 = c$. Assim, as curvas de nível são retas paralelas. Atendendo às condições impostas por A, indicando por $c_{\text{mín}}$ o valor mínimo de f em A, a reta para $z = c_{\text{mín}}$ deve ser aquela que passa por (0, 0). Portanto, $f(0, 0) = 3$ é o valor mínimo de f em A. A reta para $z = c_{\text{máx}}$ deve ser aquela que passa por (2, 0). Portanto, $f(2, 0) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ é o valor máximo de f em A.

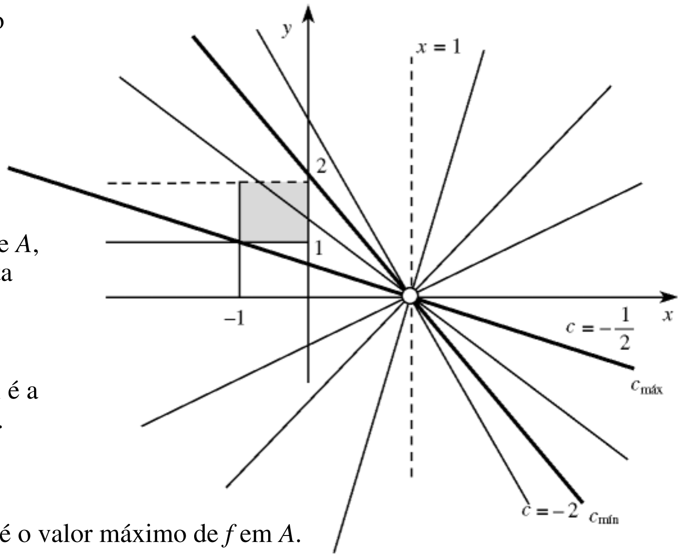


c) Sejam $f(x, y) = \dfrac{y}{x-1}$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

As curvas de nível de f são as retas

$$\frac{y}{x-1} = c \quad x \neq 1$$

$y = c(x - 1)$



Atendendo às condições de A, o valor mínimo de f é a reta que passa por (0, 2)
Portanto, $f(0, 2) = -2$ é o valor mínimo de f em A.
O valor máximo de f em A é a reta que passa por $(-1, 1)$.

Portanto, $f(-1, 1) = -\dfrac{1}{2}$ é o valor máximo de f em A.

6. Seja $z = xy$ onde $x = 5 - t$ e $y = t^2 + 3$, $t \in [0, 4]$.
Considerando
$z(t) = (5 - t)\,(t^2 + 3)$.
Vamos achar os valores máximo e mínimo de z em $[0, 4]$.

$$z'(t) = (5 - t)(2t) + (t^2 + 3)\,(-1)$$
$$= -3t^2 + 10t - 3.$$

$$z'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3 \text{ ou } t = \frac{1}{3}.$$

$z''(t) = -6t + 10$.
$z''(3) = -8 < 0$ (3 é máximo local).

$$z''\left(\frac{1}{3}\right) = +8 > 0 \left(\frac{1}{3} \text{ é mínimo local}\right).$$

Como $z(0) = 15$ e $z(4) = 19$, segue que
$z(3) = (5 - 3)(9 + 3) = 24 \;\Rightarrow\; z(3) = 24$ é a altura máxima e

$$z\left(\frac{1}{3}\right) = \left(5 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{9} + 3\right) = \frac{14}{3} \cdot \frac{28}{9} = \frac{392}{27} \quad \Rightarrow \quad z\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{392}{27} \text{ é a altura mínima.}$$

7. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$x + y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - x$.

Vamos minimizar $z(x) = f(x, 1 - x)$.
De $z(x) = f(x, 1 - x) = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$, segue
$z'(x) = 4x - 2$.

$$z'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 4x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}.$$

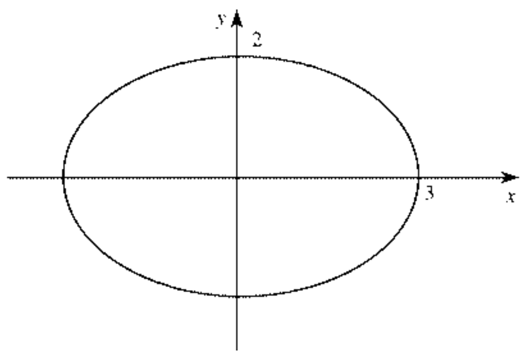
De $z''(x) = 4 > 0$, para todo x, segue que $x = \dfrac{1}{2}$ é ponto de mínimo global.

Portanto, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ é a solução procurada.

12.

a) $\underbrace{T(x, y)}_{z=36°} = 4x^2 + 9y^2$.

Logo, $4x^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ (elipse)



b) $y = x - 1$

$z(x) = T(x, x - 1) = 4x^2 + 9(x - 1)^2$, ou seja,

$z(x) = 13x^2 - 18x + 9$.

$z'(x) = 26x - 18$.

$z'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{18}{26} = \dfrac{9}{13}$.

De $z''(x) = 26 > 0$, para todo x, segue que $x = \dfrac{9}{13}$ é ponto de mínimo global de $z = z(x)$.

$y = x - 1 = \dfrac{9}{13} - 1 = -\dfrac{4}{13}$

Logo, $\left(\dfrac{9}{13}, -\dfrac{4}{13}\right)$ é o ponto de mais baixa temperatura em $x + y = 1$. (Observe que a isoterma que passa por este ponto é tangente, neste ponto, à reta $x + y = 1$. Faça uma figura e confira.)

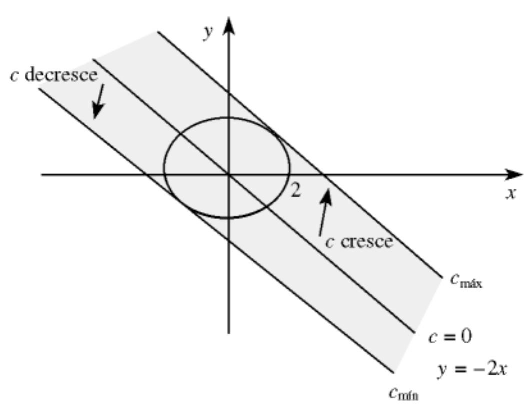
13.

b) Sejam $T(x, y) = 2x + y$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

As curvas de nível (isotermas) de $T(x, y)$ são as retas $2x + y = c$.

Indicando por $c_{\text{máx}}$ a mais alta temperatura em A, a reta para $z = c_{\text{máx}}$ deve ser a tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

Da mesma forma, para $z = c_{\text{mín}}$, a reta deve ser tangente à circunferência



$x^2 + y^2 = 4$. Vamos determinar c para que a reta $2x + y = c$ seja tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Logo, devemos determinar c para que o sistema

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x + y = c \end{cases}$ tenha solução única.

Assim, $y = c - 2x,$

$x^2 + (c - 2x)^2 = 4$ e

$5x^2 - 4\,cx + c^2 - 4 = 0.$

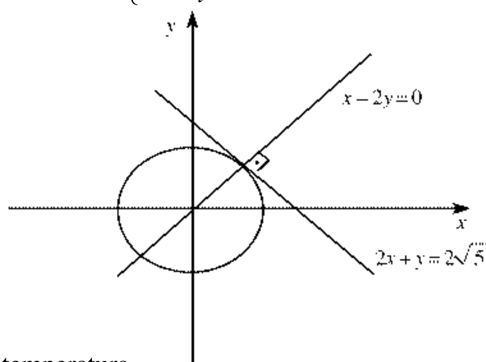
Para que o sistema tenha solução única, o discriminante deve ser igual a zero.

$\Delta = 16c^2 - 20\,(c^2 - 4) \;\Rightarrow\; 24c^2 + 80 = 0 \;\Rightarrow\; c = \pm 2\sqrt{5}.$

Logo, $c = 2\sqrt{5}$ °C é a temperatura mais alta em A e $c = -2\sqrt{5}$ °C é a temperatura mais baixa em A. O ponto de mais alta temperatura é o ponto em que a reta $2x + y = 2\sqrt{5}$ tangencia à circunferência, que é a solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 2\sqrt{5} \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

onde $x - 2y = 0$ é a reta que passa pela origem e é perpendicular a $2x + y = 2\sqrt{5}$.

Resolvendo o sistema $\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ é o ponto de mais alta temperatura.



Analogamente, resolvendo o sistema

$\begin{cases} 2x + y = -2\sqrt{5} \\ x - 2y = 0 \end{cases}$, verificamos que

$\left(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ é o ponto de mais baixa temperatura.

Exercícios 8.3

3. Sejam C_1 e C_2 duas superfícies de nível de uma função $f(x, y, z)$. O gráfico de $f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = f(x, y, z)\ (x, y, z) \in A\}$. Assim, $f(x, y, z) = c_1$ é a superfície de nível correspondente ao nível $w = c_1$ e

$f(x, y, z) = c_2$ é a superfície de nível correspondente ao nível $w = c_2$.

Então, C_1 e C_2 não podem ter ponto comum (não se interceptam).

De fato, se $(x, y, z) \in C_1$ temos $f(x, y, z) = c_1$; se $(x, y, z) \in C_2$ temos $f(x, y, z) = c_2$ o que é um absurdo se $c_1 \neq c_2$, pois f teria, num mesmo ponto (x, y, z), dois valores distintos.