CAPÍTULO 9

Exercícios 9.1

1. *a*) $$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \overset{\nearrow 0}{x} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} = 0$$

***f*)** $$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x+y}{x-y}\cdot$$

Seja $f(x,\,y) = \dfrac{x+y}{x-y}\cdot$

Tomemos γ_1 e γ_2 tais que $\gamma_1(t) = (t,\,0)$ e $\gamma_2(t) = (0,\,t)$. Segue que:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{t}{t} = 1 \text{ e}$$

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{t}{-t} = -1.$$

Como $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_2(t))$ temos que

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x+y}{x-y} \text{ não existe.}$$

***g*)** $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{xy}{y-x^3}$. Seja $f(x,\,y) = \dfrac{xy}{y-x^3}$.

Tomemos $\gamma_1(t) = (0,\,t)$ e $\gamma_2(t) = \left(\sqrt[3]{t-t^2},\,t\right)$.

Segue que

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0 \text{ e}$$

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t\sqrt[3]{t - t^2}}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 - t}}{\sqrt[3]{t^2}} = \infty$$

Logo, o limite dado não existe. (**Outro modo**. Se o limite fosse L, L real, existiria $r > 0$ tal que para todo (x, y) no domínio da função teríamos

① $$0 < \|(x, y)\| < r \Rightarrow L - 1 < f(x, y) < L + 1.$$

Porém, para todo $x_0 > 0, f(x_0, y) = \dfrac{x_0 y}{y - x_0^3}$ tende a $+\infty$ quando y tende a x_0^3 pela esquerda e isto contradiz ①.)

h) *Sugestão*: considere as curvas $\gamma_1(t) = (0, t)$ e $\gamma_2(t) = \left(\sqrt{t^4 + t^2}, t\right)$, $t > 0$.

4. Seja $f(x, y) = x^2 + y$. Temos

$f(x + h, y + k) = (x + h)^2 + y + k = x^2 + 2xh + h^2 + y + k$ e

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y) - 2xh - k}{\|(h, k)\|}$$

$$= \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

De $\dfrac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leqslant 1$ para $(h, k) \neq (0, 0)$ e $\displaystyle\lim_{(h, k) \to (0, 0)} h = 0$

segue

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \overset{\nearrow 0}{h} \cdot \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{\text{limitada}} = 0.$$

5. $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$. Temos

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{h^3}{(h^2 + k^2)^{3/2}}.$$

Seja $\varphi(h, k) = \dfrac{h^3}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$.

Tomemos $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (t, t)$.

$$\lim_{t \to 0} \varphi(\gamma_1(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3}{t^3} = 1 \qquad (1)$$

$$\lim_{t \to 0} \varphi(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3}{(2t^2)^{3/2}} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3}{2\sqrt{2}\, t^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad (2)$$

(1) é diferente de (2), portanto não existe $\displaystyle\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h, k)}{\|(h, k)\|}$.

7. $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

Seja $u = x^2 + y^2$. Se $(x, y) \to (0, 0)$, então $u \to 0$.

Logo,

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

Exercícios 9.2

1. ***a***) A função $f(x, y) = 3x^2 y^2 - 5xy + 6$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ pois $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = 3x_0^2 y_0^2 - 5x_0 y_0 + 6 = f(x_0, y_0)$ para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Logo uma função polinomial de duas variáveis é contínua em $\mathbb{R}^2$.

c) A função $f(x, y) = \ln \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$ é composta das funções $g(x, y) = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$ e $h(u) = \ln u$.

A função g é uma função racional contínua em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

A função h é contínua para $u > 0$. Portanto, $h(g(x, y))$ é contínua quando $g(x, y) > 0$, ou seja, $x - y > 0$.

Então, $f(x, y) = \ln \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$ é contínua no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$.

$$e) \text{ Seja } f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - 3y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$, a função $f(x, y)$ é contínua pois é quociente de funções contínuas. ($x - y$ e $x^2 + y^2$ são contínuas e $x^2 + y^2$ não se anula nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$).

A composta de f com a reta $\gamma(t) = (t, t)$ é

$$f(\gamma(t)) = \begin{cases} -\dfrac{1}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Como γ é contínua em $t = 0$ e a composta $f(\gamma(t))$ não é contínua em $t = 0$ $\left(\lim\limits_{t \to 0} f(\gamma(t)) \neq f(\gamma(0)) \right)$ resulta que f não é contínua em $(0, 0)$.

Portanto, f é contínua no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$.

$$g) \text{ Seja } f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right)} & \text{se } r < 1 \text{ onde } r = \|(x, y)\| \\ \\ 0 & \text{se } r \geqslant 1 \end{cases}$$

Essa função é contínua em todos os pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x_0^2 + y_0^2 < 1$ ou $x_0^2 + y_0^2 > 1$ ($r < 1$ e $r > 1$) pois nesses casos $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Vamos analisar como fica $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ quando $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

Para que o $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ exista, seja qual for a forma pela qual nos aproximamos de (x_0, y_0) através de pontos do domínio de f, $f(x, y)$ deve se aproximar do mesmo valor. Assim:

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ x^2 + y^2 < 1}} f(x, y) = \lim_{r \to 1^-} e^{\frac{1}{r^2 - 1}}. \text{ Mas } \frac{1}{r^2 - 1} \to -\infty \text{ e } e^{\frac{1}{r^2 - 1}} \to 0,$$

logo $\lim\limits_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ x^2 + y^2 < 1}} f(x, y) = 0$ e $\lim\limits_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ x^2 + y^2 > 1}} f(x, y) = \lim 0 = 0.$

Portanto, f é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.

2. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ a função $f(x, y)$ é contínua pois xy^2 e $x^2 + y^2$ são funções contínuas e $x^2 + y^2$ não se anula nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$. Logo, $f(x, y)$ é um quociente de funções contínuas com denominador diferente de zero.

Vamos estudar a continuidade no ponto (0, 0). Temos:

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} x \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

$\left(\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} x = 0 \text{ e } \left| \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \leqslant 1 \right.$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

Assim, $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ e f é contínua em (0, 0).

Portanto, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

5. Veja respostas da Seção 9.2 na página 447.