Capítulo 1

Exercícios 1.1

1. ***b***) 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, ..., sendo o termo geral dado por

$$a_n = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right), n \geqslant 2.$$

2. ***b***) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

d) Seja $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k, 0 < |t| < 1$. Temos

$a_n = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n$ e
$ta_n = t + t^2 + t^3 + \ldots + t^{n+1}$.

Subtraindo membro a membro,

$a_n - ta_n = 1 - t^{n+1}$, ou seja, $a_n = \dfrac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$.

Como $0 < |t| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} t^{n+1} = 0$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} t^k = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - t^{n+1}}{1 - t} = \dfrac{1}{1 - t}$.

f) $$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{-\frac{n}{2}}\right)^{-\frac{n}{2}}}_{e}\right]^{-2} = e^{-2}.$$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx$, onde α é um real dado.

Se $\alpha = 1$, a integral resulta em: $\lim\limits_{n\to\infty} [\ln x]_1^n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln n = \infty$.

Se $\alpha \neq 1$, a integral resulta em:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha < 1 \\ \dfrac{-1}{1-\alpha}, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^n e^{-sx}\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_0^n =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{s}\right)(e^{-sn}-1) = \frac{1}{s}\ (s>0).$$

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_2^n \frac{1}{x^2-x}\,dx$. Seja $\dfrac{1}{x^2-x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1}$. Temos $1 = A(x-1) + B\,x$. Daí, $1 = (A+B)\,x - A \quad \Leftrightarrow \quad A = -1$ e $B = 1$.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^n \frac{1}{x^2-x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\int_2^n -\frac{dx}{x} + \int_2^n \frac{dx}{x-1}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{[-\ln x]_2^n + [\ln(x-1)]_2^n\right\} = \lim_{n\to\infty}\ln 2\left(1-\frac{1}{n}\right) = \ln 2.$$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \text{sen}\,\dfrac{1}{n} = \text{sen}\,0 = 0.$

o) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\,\text{sen}\,n = \lim\limits_{x\to 0^+} \overset{0}{\cancel{x}}\ \underbrace{\text{sen}\,\frac{1}{x}}_{\text{limitada}} = 0.$

p) $a_n = \cos n\pi = (-1)^n$. Vamos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\pi$ não existe. Como $|a_n| = 1$, tal limite não poderá ser ∞ e tampouco $-\infty$. Por outro lado, como o valor de a_n é 1 ou -1, para todo real L, e para todo natural n_0 a afirmação

"qualquer que seja o natural n, $n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \dfrac{1}{4}$"

será falsa, pois, se o valor 1 satisfizer a desigualdade $|a_n - L| < \dfrac{1}{4}$, o valor -1 não a satisfará e vice-versa. Assim, tal limite não poderá ser finito. Logo, tal limite não existe.

q) $a_n = (-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n}$. Como, para todo natural $n > 0, |a_n| \leqslant 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ não poderá ser ∞ e tampouco $-\infty$. Raciocinando como no item *p*, verifica-se, também, que tal limite não poderá ser finito. Logo, tal limite não existe.

r) $\displaystyle\int_0^n \underset{\uparrow f}{e^{-sx}} \underset{\uparrow g'}{\cos x}\, dx \ (s > 0)$. Aplicando integração por partes:

$$I = \left[e^{-sx} \operatorname{sen} x\right]_0^n - \int_0^n - se^{-sx} \operatorname{sen} x \, dx = e^{-sn} \operatorname{sen} n + s \int_0^n e^{-sx} \operatorname{sen} x \, dx.$$ Ou seja,

$$I = e^{-sn} \operatorname{sen} n + s \int_0^n e^{-sx} \operatorname{sen} x \, dx. \quad ①$$

Por outro lado,

$$\int_0^n \underset{\uparrow f}{e^{-sx}} \underset{\uparrow g'}{\operatorname{sen}} x \, dx = \left[e^{-sx} (-\cos x)\right]_0^n - \int_0^n -se^{-sx} \left(-\cos x\right) dx =$$

$$= -e^{-sn} \cos n + 1 - s \int_0^n e^{-sx} \cos x \, dx. \quad ②$$

Substituindo ② em ①:

$$I = e^{-sn} \operatorname{sen} n - se^{-sn} \cos n + s - s^2 \underbrace{\int_0^n e^{-sx} \cos x \, dx}_{I}.$$ Daí,

$$(1 + s^2)\, I = e^{-sn} \operatorname{sen} n - se^{-sn} \cos n + s.$$

Portanto,

$$\int_0^n e^{-sn} \cos x \, dx = \frac{1}{1+s^2} \left[e^{-sn} \operatorname{sen} n - se^{-sn} \cos n + s\right].$$

Sendo sen n e cos n limitadas e $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-sn} = 0 \ (s > 0)$, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-sn} \operatorname{sen} n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} se^{-sn} \cos n = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-sx}\cos x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+s^2}\left[e^{-sn}\operatorname{sen} n-s\,e^{-sn}\cos n+s\right]=\frac{s}{1+s^2}.$$

$s)$ $n\left[1-\dfrac{(n+1)^n}{en^n}\right]=\dfrac{1-\dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\dfrac{1}{n}}=\dfrac{e-(1+u)^{\frac{1}{u}}}{eu}$, onde $u=\dfrac{1}{n}$.

Então, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{(n+1)^n}{en}\right]=\lim_{u\to 0^+}\frac{e-(1+u)^{\frac{1}{u}}}{eu}=\frac{0}{0}$

pois $\displaystyle\lim_{u\to 0^+}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e.$

Pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{e-(1+u)^{\frac{1}{u}}}{eu}=\lim_{u\to 0^+}\frac{-(1+u)^{\frac{1}{u}}\,(u^{-1}\ln(1+u))'}{e}$$

De $(u^{-1}\ln(1+u))'=-u^{-2}\ln(1+u)+\dfrac{u^{-1}}{1+u}=-\dfrac{(1+u)\ln(1+u)+u}{u^2\,(1+u)}$, resulta

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{e-(1+u)^{\frac{1}{u}}}{e^u}=\lim_{u\to 0^+}\frac{-(1+u)^{\frac{1}{u}}}{e(1+u)}\lim_{u\to 0^+}\frac{-(1+u)\ln(1+u)+u}{u^2}.$$

Temos $\displaystyle\lim_{u\to 0^+}\frac{-(1+u)^{\frac{1}{u}}}{e(1+u)}=-1$. Pela regra de L'Hospital, vem:

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{-(1+u)\ln(1+u)+u}{u^2}=\lim_{u\to 0^+}\frac{-\ln(1+u)}{2u}=\frac{0}{0}.$$

Aplicando novamente a regra de L'Hospital

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{-\ln(1+u)}{2u}=\lim_{u\to 0^+}\frac{-1}{2(1+u)}=-\frac{1}{2}.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} n\left[-\frac{(n+1)^n}{en}\right] = \lim_{u\to 0^+} \frac{e-(1+u)^{\frac{1}{u}}}{eu} = (-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

3. Seja $s_u = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$. Temos

$s_1 = \left(1-\frac{1}{2}\right); s_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right); \ldots ; s_n = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$. Assim,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1-\frac{1}{n+1}.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$

4. ***a***) Consideremos uma seqüência de termo geral a_n e seja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Já vimos que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a$ (Exemplo 8). Temos

$b_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$ e $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$

b) Temos $b_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k}}}{n}$ e $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$. Logo, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1.$ Ou seja,

se $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$ então $\lim_{n\to\infty}\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\ldots+\sqrt[n]{2}}{n} = 1.$

5. $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n} =$

$$= e^{\frac{1}{n}\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n)} = e^{(\ln a_1 + \ln a_2 + \ln a_3 + \ldots + \ln a_n)/n}.$$

Supondo $a_n > 0, n \geqslant 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a > 0$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln a_n) = \ln(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = \ln a$.

Pelo Exemplo 8, sendo $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n}{n} = \ln a$.

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} = e^{\ln a} = a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

6. $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{\dfrac{a_2}{a_1} \cdot \dfrac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{a_{n+1}}{a_n}}$

Supondo $a_n > 0, n \geqslant 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, pelo Exercício 5 temos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1} = 1$, resulta $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

7. ***a***) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{n!} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, n!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Pelo Exercício 6: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{e}$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = \dfrac{1}{e}$.

10. Sejam $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, uma função contínua em a e a_n uma seqüência tal que, para todo n, $a_n \in A$. Sendo f contínua em a, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad ①$$

Sendo $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, para o $\delta > 0$ acima existe um número natural n tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \delta. \quad ②$$

De ① e ② resulta:

$$n > n_0 \Rightarrow |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$.

11. De $f\colon A \to A$, $a_0 \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$, segue que $a_n \in A$ para todo n. Sendo f contínua em a e a_n convergente a a, teremos $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(a)$ (veja Vol. 1, Seção 4.4, 5.ª edição). Como $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+1} = a$, resulta $a = f(a)$.

12. Sejam a_n e b_n duas seqüências tais que, para todo natural n,

$$|a_n - b_n| \leqslant 5\, e^{-n} \qquad \left(\text{ou} - \frac{5}{e^n} \leqslant a_n - b_n \leqslant \frac{5}{e^n}\right).$$

Temos $\lim\limits_{n \to \infty} -\dfrac{5}{e^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5}{e^n} = 0$. Pelo teorema do confronto, $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$.

Sabemos, também, que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Para concluir que $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = a$ é só observar que $b_n = (b_n - a_n) + a_n$.

13. ***a***) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \iint_{A_n} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{1} d\rho\, d\theta = 2\pi.$

b) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \int_1^n \frac{\rho}{\rho^4}\, d\rho\, d\theta =$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2}\right) \cdot 2\pi = \pi.$$

$\boldsymbol{c}$) Para $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_1^n \frac{\rho}{\rho^{2\alpha}}\,d\rho\,d\theta =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)} - \frac{1}{2(1-\alpha)}\right]\cdot 2\pi.$$

Se $\alpha > 1$, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)} = 0$. Se $\alpha < 1$, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)} = \infty$.

Para $\alpha = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy =$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_1^n \frac{1}{\rho}\,d\rho\,d\theta = \lim_{n\to\infty} 2\pi \ln n = \infty$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy = \frac{\pi}{\alpha-1}, \text{ se } \alpha > 1 \quad \text{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy = \infty, \quad \text{se} \quad \alpha \leqslant 1.$$

$\boldsymbol{e}$) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^n e^{-\rho}\,\rho\,d\rho\,d\theta =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[-e^{-\rho}(\rho+1)\right]_0^n \int_0^{2\pi} d\theta = \lim_{n\to\infty}\left[-\underbrace{\frac{n+1}{e^n}}_{\to 0} + 1\right]\cdot 2\pi = 2\pi.$$

14. Seja $a_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. Temos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{1}{x}(-\cos x)\right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x^2}(-\cos x)\,dx\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{\cos n}{n} + \cos 1 - \int_1^n \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right].$$

Temos $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}=\lim_{n\to\infty}\cancelto{0}{\frac{1}{n}}\;\underbrace{\cos n}_{\text{limitada}}=0$. Por outro lado,

para todo $x\geqslant 1$, $0\leqslant\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^2}$. Como $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente, pelo critério de comparação, $\displaystyle\int_1^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$ também é convergente e portanto $\displaystyle b_n=\int_1^{n}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ é convergente. Logo, a seqüência a_n dada é convergente.

15. Seja a seqüência $\displaystyle a_n=\int_1^{n}\operatorname{sen} x^{\alpha}\,dx$, $\alpha>1$. Fazendo a mudança de variável $u=x^{\alpha}$, $du=\alpha x^{\alpha-1}\,dx$ e, portanto, $dx=\dfrac{du}{\alpha u^{(\alpha-1)/\alpha}}$. Segue que $\displaystyle a_n=\frac{1}{\alpha}\int_1^{n^{\alpha}}\frac{\operatorname{sen} u}{u^{(\alpha-1)/\alpha}}\,du.$
Integrando por partes, ou seja, procedendo como no Exemplo 5, item a, da pág. 41 do Vol. 2 (5.ª edição), obtemos

$$\int_1^{n^{\alpha}}\frac{1}{u^{(\alpha-1)/\alpha}}\operatorname{sen} u\,du=\left[\frac{1}{u^{(\alpha-1)/\alpha}}(-\cos u)\right]_1^{n^{\alpha}}+\frac{1-\alpha}{\alpha}\int_1^{n^{\alpha}}\frac{\cos u}{u^{(2\alpha-1)/\alpha}}\,du.$$

Da hipótese $\alpha>1$, segue $\dfrac{2\alpha-1}{\alpha}>1$ e daí $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{u^{(2\alpha-1)/\alpha}}\,du$ será absolutamente convergente e, portanto, convergente. (Veja Seção 3.4 do Vol. 2, 5.ª edição.) Observando, ainda, que $\dfrac{\alpha-1}{\alpha}>0$, a seqüência dada é convergente e

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{\alpha}\left(\cos 1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{u^{(2\alpha-1)/\alpha}}\,du\right).$$

16. Olhando para a solução do exercício anterior, para $\alpha=\dfrac{1}{2}$ temos

$$\int_1^{n^{\alpha}}\frac{1}{u^{(\alpha-1)/\alpha}}\operatorname{sen} u\,du=\left[\frac{1}{u^{(\alpha-1)/\alpha}}(-\cos u)\right]_1^{n^{\alpha}}+\frac{1-\alpha}{\alpha}\int_1^{n^{\alpha}}\frac{\cos u}{u^{(2\alpha-1)/\alpha}}\,du=$$

$$=\left[-\sqrt{n}\,\cos\sqrt{n}+\cos 1\right]-\int_1^{\sqrt{n}}\cos u\,du=$$

$$=-\sqrt{n}\,\cos\sqrt{n}-\operatorname{sen}\sqrt{n}+\cos 1+\operatorname{sen} 1$$

Observe que sendo k_n a seqüência dada por $k_1=31$, $k_2=314$, $k_3=3141$, ... ou seja, k_n é igual ao produto de 10^n pela aproximação de π com n casas, teremos

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{k_n^2}\cos\sqrt{k_n^2} = +\infty$. Confira! Do mesmo modo, é possível construir uma outra seqüência p_n de números naturais tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{p_n^2}\cos\sqrt{p_n^2} = -\infty$. Pense! Logo a seqüência é divergente.

18. ***b***) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[1-\cos\dfrac{1}{n}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} x}{1} = 0.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{1+n^3}{n^2}\right) - \operatorname{sen} n\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}+n\right) - \operatorname{sen} n}{\frac{1}{n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2n^2}\cos\left(\frac{1}{2n^2}+n\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\overbrace{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{2n^2}}}^{\nearrow 1}\cdot\overbrace{\frac{1}{n}}^{\nearrow 0}\underbrace{\cos\left(\frac{1}{2n^2}+n\right)}_{\text{limitada}} = 0$$

(Lembre-se: $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$.)

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+n^2\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{1-n^2\operatorname{sen}\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x^2-\operatorname{sen} x} = -2$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\operatorname{sen}\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right) - \operatorname{sen} x_0\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\left(x_0+\frac{1}{n}\right) - \operatorname{sen} x_0}{\frac{1}{n}} = \cos x_0$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[e^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}} - 1\right] = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\operatorname{sen} x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\operatorname{sen} x}\cos x}{1} = 1.$

Exercícios 1.2

1. ***a***) Consideremos os naturais m e n com $1 \leqslant m < n$. Temos

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^3}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^3} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^3}$$

Como $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m} \frac{1}{k^3} > 0$ resulta que quaisquer que sejam os naturais m e n com $m < n$,

$s_m < s_n$. Logo a seqüência s_n é crescente.

Temos $s_n = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + ... + \dfrac{1}{n^3} \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^3}\,dx.$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right] = \frac{1}{2}.$

Portanto, $s_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}$ para todo $n \geqslant 1$.

A seqüência é convergente, pois é crescente e limitada superiormente por $\dfrac{3}{2}$.

Portanto, existe um número real s tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = s$ e $s \leqslant \dfrac{3}{2}$.

b) Para todo $n \geqslant 1$ temos

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}\,dx.$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{n\to\infty} (2\sqrt{n+1} - 2) = \infty$ resulta $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Portanto, s_n é divergente.

c) Seja $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. Temos,

$s_0 = 1\,;\ s_1 = 1 + \dfrac{1}{2};\ \ s_2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2};\ ...;\ \ s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{2^n}.$

Da fórmula para o cálculo da soma dos termos de uma progressão geométrica, resulta

$$s_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Então, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 2$ e s_n é convergente.

d) Seja $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$. Comparemos com a seqüência $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^{k-1}}$ que é convergente, pois, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 2$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} < 2.$$

Para $k \geqslant 1$, temos $2^{k-1} \leqslant k!$, pois, $k! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot} \ldots \cdot k$ que além do fator 1 contém $k-1$ fatores, cada um maior ou igual a 2. Então, $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$. Daí, para todo $n \geqslant 1$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 2.$$

Segue que s_n é uma seqüência crescente e limitada superiormente por 2. Então, s_n é convergente.

e) Seja $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2+1}$.

Observamos que, para $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k^2+1} < \dfrac{1}{k^2}$.

A seqüência $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ é crescente e limitada superiormente por 2. Então, para todo natural $n \geqslant 1$,

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2+1} < \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant 2$. Segue que a seqüência s_n é crescente e limitada superiormente por 2. Portanto, s_n é convergente.

2. $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2a_1}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2a_2}$, ... De modo geral, teremos, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, para $n \geqslant 1$. De $a_1 = \sqrt{2} < 2$, $a_2 = \sqrt{2a_1} < \sqrt{4} = 2$, segue, por indução, $a_n < 2$, para todo $n \geqslant 1$. Logo, a seqüência a_n é limitada superiormente por 2. Vamos mostrar, a seguir, que tal seqüência é crescente. De $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ e de $a_n < 2$ segue

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} > 1 \text{ e, portanto, } a_{n+1} > a_n \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

Logo, a seqüência a_n é crescente. Sendo crescente e limitada superiormente por 2, tal seqüência é convergente para um número real a. Sendo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, teremos, também, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Como $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, para todo $n \geqslant 1$,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} \text{ e, portanto, } a = \sqrt{2a}.$$

Segue que $a^2 = 2a$ e, portanto, $a = 2$, pois, $a > 0$. Deste modo, a seqüência a_n converge para 2.

3. Sendo a_n crescente, b_n decrescente e $b_n - a_n \geqslant 0$, para $n \geqslant 0$, resulta $a_n \leqslant b_0$ e $b_n \geqslant a_0$, para todo $n \geqslant 0$. Deste modo as seqüências a_n e b_n serão convergentes. Sendo tais seqüências convergentes e da hipótese $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, resulta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

5. Seja $a_n = \iint_{A_n} e^{-(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$, onde A_n é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant n^2$, $n \geqslant 1$. Temos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^n e^{-\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \lim_{n\to\infty} \left(1 - e^{-n^2}\right)\pi = \pi.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pi$ então a seqüência de termo geral a_n é convergente.

6. Seja $a_n = \iint_{A_n} \frac{e^{-x^2y^2}}{1+(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$, onde A_n é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant n^2$, $n \geqslant 1$. De $A_n \subset A_{n+1}$, segue $a_n \leqslant a_{n+1}$, para todo $n \geqslant 1$. Logo, a seqüência a_n é crescente. Por outro lado, a seqüência $b_n = \iint_{A_n} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ é crescente e convergente (verifique) e pelo fato de, para todo (x, y),

$$\frac{e^{-x^2y^2}}{1+(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}$$

resulta $a_n \leqslant b_n$, para todo $n \geqslant 1$. Sendo b o limite de b_n, teremos $a_n \leqslant b$, para todo $n \geqslant 1$. Logo, a seqüência a_n é convergente.

7. A seqüência $a_n = \int_1^n \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx,\ n \geqslant 1$, é crescente e $a_n \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx < 1$, para todo $n \geqslant 1$. Sendo a_n crescente e limitada superiormente por 1, tal seqüência será convergente.

8. A seqüência $a_n = \int_1^n \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx,\ n \geqslant 1$, é crescente, pois, $\operatorname{sen}\frac{1}{x^2} > 0$ para $x \geqslant 1$.

Temos, ainda, $a_n = \int_1^n \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx < 1$, para todo $n \geqslant 1$. Logo, a_n é convergente.

9. $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{10}{10^k} < 10\left[\underbrace{\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots}_{\frac{1}{9}}\right]$.

Logo, $s_n < \frac{10}{9},\ n \geqslant 1$. Assim, s_n é crescente e limitada superiormente. Portanto, s_n é convergente.

10. Seja $s_n = \sum_{k=0}^{n} [1+(-1)^k],\ n \geqslant 0$. Temos

$$s_0 = 1 + (-1)^0 = 2$$
$$s_1 = \left\lfloor 1 + (-1)^0 \right\rfloor + \left\lfloor 1 + (-1)^1 \right\rfloor = 2 + 0 = 2$$
$$s_2 = 2 + 0 + 2 = 4$$
$$s_3 = 2 + 0 + 2 + 0 = 4$$
$$s_4 = 2 + 0 + 2 + 0 + 2 = 6$$

e, de modo geral,

$$s_n = \begin{cases} n+1, & \text{se } \ n \text{ ímpar} \\ n+2, & \text{se } \ n \text{ par.} \end{cases}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $n_0 > \epsilon$,

$$n > n_0 \Rightarrow s_n > \epsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.