Capítulo 3

Exercícios 3.1

1. ***b****)* Seja a série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$. A função $f(x) = \frac{1}{x^2 \ln x}$ é contínua, decrescente e positiva no intervalo $[3, +\infty[$. De $\ln x > 1$ para $x \geqslant 3$, temos

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x} \leqslant \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x} \text{ convergente } \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} \text{ convergente.}$$

d) Seja a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{1+k^4}$. A função $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$ é contínua, positiva e decrescente em $[0, +\infty[$. Temos:

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^4} = \lim_{\beta \to \infty} \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^4} = \lim_{\beta \to \infty} \left[\frac{1}{2} \text{ arc tg } x^2\right]_0^{\beta} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^4} \text{ convergente } \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{1+k^4} \text{ convergente.}$$

e) Seja a série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k \ln(\ln k)}$.

Seja $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$. Então, $\int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}\, dx =$

$$= \lim_{\beta \to \infty} \left[\ln(\ln \ln x)\right]_3^{\beta} = \infty, \text{ pois}$$

$$\left[\ln(\ln \ln x)\right]' = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}.$$

Portanto, a série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k \ln(\ln k)}$ é divergente.

f) Seja a série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k[\ln(\ln k)]^{\alpha}}$, $\alpha > 1$

$$\text{Temos } \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x[\ln(\ln x)]^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\beta \to \infty} \left[\ln(\ln \beta)^{1-\alpha} - \ln(\ln 3)^{1-\alpha}\right] =$$
$$= \frac{\ln(\ln 3)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Portanto, $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x[\ln(\ln x)]^{\alpha}}$ é convergente para $\alpha > 1$.

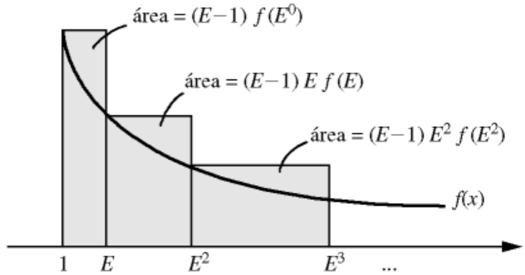
Daí, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k[\ln(\ln k)]^{\alpha}}$ é, também, convergente para $\alpha > 1$.

3. Suponha que *f*: [0, ∞[→ ℝ seja contínua, decrescente e positiva e que a série $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ seja convergente com soma *s*. Então, $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ é convergente e temos, para todo *n*,

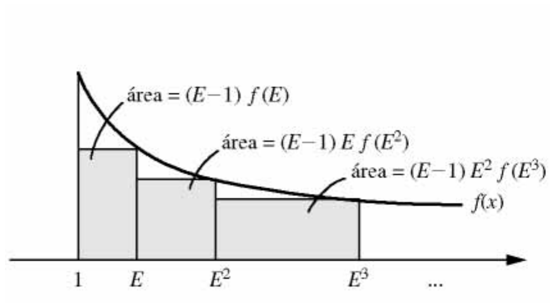
$$0 < s - \sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_n^{\infty} f(x)\, dx.$$

Logo, $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ é um valor aproximado para *s*, com erro inferior a $\int_n^{\infty} f(x)\, dx$.

4.



$$\sum_{k=0}^{\infty} (E-1)E^k \ f(E^k) = (E-1) \sum_{k=0}^{\infty} E^k \ f(E^k) \geqslant \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$



$$\sum_{k=1}^{\infty} (E-1)\, E^{k-1} \ f(E^k) = \frac{E-1}{E} \sum_{k=0}^{\infty} E^k \ f(E^k) \leqslant \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

Por comparação, seguem *a*) e *b*). Um outro modo de resolver o problema é fazendo a mudança de variável $x = E^u$, $dx = E^u \ln E\, du$, na integral:

$\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \ln E \int_0^{\infty} E^u \ f(E^u) du$, e, em seguida, aplicar o critério da integral e o Exercício 2 desta seção.

5. ***a*)** $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ convergente $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\, dx$ é convergente

(critério da integral e Exercício 2).

Façamos $x = E^y$. Temos $dx = \ln E\, E^y\, dy$. Então,

$\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ convergente $\Leftrightarrow \int_0^{\infty} E^y \ f(E^y)\, dy$ convergente $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} E^k \ f(E^k)$ convergente.

***b*)** $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ divergente $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\, dx$ divergente $\Leftrightarrow \int_0^{\infty} E^y \ f(E^y)$ divergente $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} E^k \ f(E^k)$ divergente.

6. ***a***) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\ f(2^k) = 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + ... + \frac{2^n}{2^{n\alpha}} + ...$ que é uma série geométrica de razão $2^{1-\alpha}$.

Logo, $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\ f(2^k)$ é convergente para $\alpha > 1$ e $s = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}$; é divergente para $\alpha \leqslant 1$.

b) Utilizando o critério de Cauchy-Fermat e (a):

$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\ f(2^k)$ é convergente para $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ $(E = 2)$ é convergente para $\alpha > 1$.

$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\ f(2^k)$ é divergente para $\alpha \leqslant 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ é divergente para $\alpha \leqslant 1$.

7. ***a***) Seja $f(k) = \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$. Então,

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^k\ f(e^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{e^k(\ln e^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

que é a série harmônica de ordem α: convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leqslant 1$.

Então, $\sum_{k=2}^{\infty} f(k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$ é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leqslant 1$.

b) Seja $f(k) = \frac{1}{k \ln k[\ln(\ln k)]^\alpha}$

$$\sum_{k=2}^{\infty} e^k f(e^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{e^k\ \ln e^k[\ln(\ln e^k)]^\alpha} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$$ convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leqslant 1$

(Exercício 7a).

Portanto, $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k \ln k[\ln(\ln k)]^{\alpha}}$ é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leqslant 1$.

c) Seja $f(k) = \dfrac{1}{k \ln k \ln(\ln k)\,[\ln \ln(\ln k)]^{\alpha}}$.

$\sum_{k=2}^{\infty} e^k\, f(e^k) = \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k \ln k[\ln \ln k]^{\alpha}}$ é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leqslant 1$ (Exercício 7*b*).

Portanto,

$\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k \ln k \ln(\ln k)[\ln \ln(\ln k)]^{\alpha}}$ é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leqslant 1$.

d) Seja $f(k) = \dfrac{1}{(\ln k)^{\alpha}}$.

$\sum_{k=2}^{\infty} e^k f(e^k) = \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{e^k}{(\ln e^k)^{\alpha}} = \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{e^k}{k^{\alpha}}$ é divergente. Logo, $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln k)^{\alpha}}$ é divergente.

e) Seja $f(k) = \dfrac{1}{\ln k[\ln \ln k]^{\alpha}}$. Aplicando o critério de Cauchy-Fermat duas vezes, chega-se a $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{e^k}{k^{\alpha}}$ que é divergente (Exercício 7*d*).

Exercícios 3.2

1. ***b***) Sejam $a_k = \dfrac{(k+1)\, e^{-k}}{2k+3}$ e $c_k = e^{-k}$. A série $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}$, usada como comparação, é convergente (série geométrica de razão $e^{-1} < 1$). Como $\lim_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{c_k} = \lim_{k\to\infty} \dfrac{k+1}{2k+3} = \dfrac{1}{2} > 0$, ambas as séries $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(k+1)\, e^{-k}}{2k+3}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}$ são convergentes (pelo critério do limite).

***d*)** Sejam $a_k = (k^3 + 1)\, e^{-k}$ e $c_k = e^{-k/2}$. A série $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k/2}$ é convergente (série geométrica de razão $e^{-1/2} < 1$). Temos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{c_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3+1}{e^{k/2}} = 0.$$

Pelo critério do limite, a série $\sum_{k=0}^{\infty} (k^3+1)\, e^{-k}$ é convergente.

***f*)** $\dfrac{2+\cos k\sqrt{k}+3}{k+1} > \dfrac{1}{k+1}$. A série $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ é divergente. Pelo critério de comparação, se $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k+1}$ é divergente, então $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{2+\cos k\sqrt{k}+3}{k+1}$ é divergente.

***h*)** Sejam $a_k = \dfrac{1}{k^2 \ln k}$ e $c_k = \dfrac{1}{k^2}$. $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{c_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\ln k} = 0$.

Pelo critério do limite, como a série de comparação é a harmônica convergente $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$, concluímos que a série $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k^2 \ln k}$ é convergente.

***j*)** Sejam $a_k = \dfrac{1}{k\sqrt[k]{k}}$ e $c_k = \dfrac{1}{k}$.

$\lim \dfrac{a_k}{c_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k^{\frac{1}{k}}} = 1 > 0$. Pelo critério do limite, ambas $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\sqrt[k]{k}}$ são divergentes.

***l*)** Temos $\cos \dfrac{1}{k^2} = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\, \dfrac{1}{2k^2} \left(\mathrm{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \right)$.

Como $\lim_{k\to\infty} k^2\left(1-\cos\frac{1}{k^2}\right)=\lim_{k\to\infty} 2k^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2k^2}=$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{sen} 1/2k^2}{1/2k^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{2k^2}=0,$$ a série tem chance de ser

convergente. Tomando como série de comparação a harmônica convergente $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^2}$, segue

$a_k=k^2\left(1-\cos\frac{1}{k^2}\right)$ e $c_k=\frac{1}{2k^2}$.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{c_k}=\lim_{k\to\infty}\left(2k^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2k^2}\right)\cdot 2k^2=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{2k^2}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{2k^2}}=1.$$

Pelo critério do limite, concluímos a convergência da série dada.

***m*)** Sejam $a_k=\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ e $c_k=\frac{1}{k^2}$.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{c_k}=\lim_{k\to\infty}k^2\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)=\ln\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{k^2}=\ln e=1>0\,.$$

Pelo critério do limite, como a série de comparação foi a harmônica convergente $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, concluímos que a série $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ é convergente.

3. A série $\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k/2}$ é convergente pois é uma série geométrica de razão $2^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$.

Façamos $a_k=\frac{k^\lambda}{2^k}$ e $c_k=2^{-k/2}$ $\quad(\lambda>0)$.

Temos $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{c_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^\lambda}{2^{k/2}}=0$ (por L'Hospital). Pelo critério do limite, a série dada é convergente.

5. *a*) Seja $\lim_{k\to\infty}\frac{k}{(\ln k)^\gamma}$, $\gamma>0$. Façamos $\ln k=u$. Logo, $k=e^u$. Se $k\to\infty, u\to\infty$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{(\ln k)^\gamma}=\lim_{u\to\infty}\frac{e^u}{u^\gamma}=\infty$$ (utilizando L'Hospital).

b) Sejam $a_k = \dfrac{1}{(\ln k)^\gamma}$ e $c_k = \dfrac{1}{k}$ $(\gamma > 0)$. Temos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{c_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{(\ln k)^\gamma} = \infty.$$

Pelo critério do limite, visto que a série de comparação é a harmônica divergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, concluímos que a série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^\gamma}$ é divergente.

6. ***a***) Sejam $a_k = \dfrac{k^2+5}{k^2(\ln k)^3}$ e $c_k = \dfrac{1}{(\ln k)^3}$.

A série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^3}$ é divergente (Exercício 5*b*)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{c_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+5}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{5}{k^2}\right) = 1.$$

Pelo critério do limite, concluímos que a série $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k^2+5}{k^2(\ln k)^3}$ é divergente.

c) Para $k \geqslant 4$, $\dfrac{2^k}{k!} < \dfrac{1}{2^{k-4}}$. Por comparação, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ é convergente, pois $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^{k-4}}$ é uma série geométrica convergente.

d) A série $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{10}}$ é convergente (Exemplo 2 da Seção 3.1: critério da integral).

Observe que se tomássemos como série de comparação a harmônica convergente $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, teríamos $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{c_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{(\ln k)^{10}} = \infty.$

Portanto, o critério do limite não nos daria informação alguma sobre a convergência ou divergência da série dada.

e) Pelo critério de Cauchy-Fermat, o comportamento da série $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha(\ln k)^\beta}$ é o mesmo que o de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{(1-\alpha)k}}{k^\beta}$. Então, para $\alpha > 1$ e $\beta > 0$ ou $\alpha = 1$ e $\beta > 1$ a série será convergente; para $\alpha = 1$ e $0 < \beta \leqslant 1$ ou $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 0$ a série será divergente.

f) Sejam $a_k = \dfrac{\sqrt[3]{k^5+3k+1}}{k^3(\ln k)^2}$ e $c_k = \dfrac{1}{k(\ln k)^2}$.

A série $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ é convergente (Exercício 6*e*)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{c_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[3]{k^5+3k+1}}{k^2} = 0.$$

Pelo critério do limite, a série $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k^5+3k+1}}{k^3(\ln k)^2}$ é convergente.

g) Sejam $a_k = \dfrac{(\ln k)^3}{k^2}$ e $c_k = \dfrac{1}{k(\ln k)^2}$.

A série $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ é convergente (Exercício 6*e*)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{c_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(\ln k)^3}{k^2} \cdot k(\ln k)^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{(\ln k)^5}{k} = 0 \text{ (Exercício 5}a\text{).}$$

Portanto, pelo critério do limite, a série $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^3}{k^2}$ é convergente.

7. ***b***) Temos $\operatorname{sen} x < x$, para $0 < x < 1$. Daí,

$$\operatorname{sen} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}} < \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}, \; n \geqslant 1.$$

Pelo critério de comparação, tendo em vista que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}$ é convergente, segue

que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$ é convergente.

9. Seja $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) =$

$$= \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \ldots + \ln (n + 1) - \ln n = \ln (n + 1)$$

Temos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k+1}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \lim_{n\to\infty} \ln (n+1) = \infty .$$

11. ***a***) Temos $\ln \dfrac{|\alpha - k + 1|}{k} = -\ln \dfrac{k}{|k - 1 - \alpha|}$.

Utilizando o Exercício 10,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{|\alpha - k + 1|}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{|k - 1 - \alpha|} = -\infty .$$

b) Temos

$$\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{|\alpha - k + 1|}{k} = \ln |\alpha| + \ln \frac{|\alpha - 1|}{2} + \ln \frac{|\alpha - 2|}{3} + \ldots + \ln \frac{|\alpha - n + 1|}{n} =$$

$$= \ln \frac{|\alpha|}{1} \cdot \frac{|\alpha - 1|}{2} \cdot \frac{|\alpha - 2|}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{|\alpha - n + 1|}{n} =$$

$$= \ln \left| \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n} \right| = \ln \left| \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!} \right|$$

Portanto,

$$\left| \frac{\alpha (\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!} \right| = e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln \frac{|\alpha - k + 1|}{k}} .$$ Por a),

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!} \right| = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln \frac{|\alpha - k + 1|}{k}} = 0.$$

Ou seja, $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha - 1) (\alpha - 2) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!} \right| = 0.$

c) Temos que

$$\frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!} = (-1)^n \underbrace{\left| \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \right|}_{a_n}$$

para todo $n \geqslant 1$.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, a_n$ é alternada. Temos $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left|\dfrac{n-\alpha}{n+1}\right| < 1,\, n \geqslant 1,$ logo, a_n é decrescente.

Como a seqüência a_n é decrescente e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0(11b)$, segue que a série

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ é convergente.

Exercícios 3.4

1. ***b)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{n!\,2^n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)} \cdot \frac{2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

Pelo critério da razão a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\,2^n}{n^n}$ é convergente.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\cdot\alpha^{n+1}}{n\alpha^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\alpha = \alpha.$

Pelo critério da razão, se $0 < \alpha < 1$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n$ é convergente.

Se $\alpha > 1$ a série é divergente.

Para $\alpha = 1$, temos a série $\sum_{n=1}^{\infty} n$, que é divergente.

d) De $\sum_{n=1}^{k} \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right] = \sqrt{k+1} - 1,$ resulta $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right] = \infty$, logo, a série é divergente.

2. Se $a > 0$, então $\dfrac{a^n}{n!} > 0.$ Aplicando o critério da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(n+1)} = 0.$$

Portanto, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ é convergente. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

3. ***b*)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \dfrac{n^2}{x^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} = x$. Pelo critério da razão, para $0 < x < 1$ a série é convergente, e para $x > 1$, divergente. Se $x = 1$, temos a série harmônica convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Portanto, $0 < x \leqslant 1$.

***d*)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{x^n} = \dfrac{x}{2}$.

Pelo critério da razão, a série é convergente para $0 < x < 2$ e divergente para $x > 2$. Para $x = 2$ teremos $a_n = 1$, $n \geqslant 1$, logo, para este valor de x a série será, também, divergente. Logo, a série será convergente para $0 < x < 2$.

***f*)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n+1)(2n+3)} \cdot \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n+1)}{x^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{2n+3} = 0$. Logo, a série é convergente para todo $x > 0$.

4. Temos $\ln 1 \leqslant \ln x \leqslant \ln 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Daí $\ln 1 \leqslant \int_1^2 \ln x\, dx \leqslant \ln 2$; $\ln 2 \leqslant \ln x \leqslant \ln 3$ para $2 \leqslant x \leqslant 3$.

Daí, $\ln 2 \leqslant \int_2^3 \ln x\, dx \leqslant \ln 3$.

E assim por diante:

$$\ln(n-1) \leqslant \ln x \leqslant \ln n \text{ para } n-1 \leqslant x \leqslant n$$

Daí, $\ln(n-1) \leqslant \int_{n-1}^{n} \ln x\, dx \leqslant \ln n$.

Então,

$$\ln 1 + \ln 2 + ... + \ln(n-1) \leqslant \int_1^2 \ln x\, dx + \int_2^3 \ln x\, dx + ... + \int_{n-1}^{n} \ln x\, dx \leqslant \ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n.$$

$$\ln 1\cdot 2\cdot ...\cdot(n-1) \leqslant \int_1^n \ln x\, dx \leqslant \ln 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$$

$$\ln(n-1)! \leqslant \int_1^n \ln x\, dx \leqslant \ln n! \quad ①$$

Temos

$$\int_1^n \ln x\, dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1 = \ln \frac{n^n}{e^n} \cdot e.$$

De ①, resulta $\ln (n-1)! \leqslant \ln \frac{n^n}{e^n} \cdot e \leqslant \ln n!$

Segue que:
$(n-1)!\, e^n \leqslant en^n \leqslant n!\, e^n$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\, x^n} = \lim\limits_{n\to\infty} x \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

Então, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{e} \qquad (x > 0)$

Pelo critério da razão, a série é convergente se $\frac{x}{e} < 1$, ou seja, $0 < x < e$, e divergente se $x > e$. Para $x = e$, a série é divergente (Exercício 5). Logo, a série será convergente para $0 < x < e$.

Sendo $a_n > 0, n \geqslant 1, 0 < t < 1$ e $\frac{a_{n+1}}{a^n} < t$, para todo $n \geqslant 1$, resulta $a_{n+1} < a_n t$, para todo $n \geqslant 1$. Assim, $a_2 < a_1 t$, $a_3 < a_2 t < a_1 t^2$, $a_4 < a_3 t < a_1 t^3$ e de modo geral

$a_n < a_1 t^{n-1}$, para todo $n \geqslant 1$. Como $0 < t < 1$, a série geométrica $\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k$ é

convergente, daí, pelo critério de comparação, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ será também convergente.

8. ***a***) Temos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} a, \text{ se } n \text{ é par} \\ b, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Logo, não existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

b) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é tal que $a_n > 0$ para todo $n \geqslant 1$, pois $0 < a < b < 1$.

Por *a*, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$ ou $\frac{a_{n+1}}{a_n} = b < 1$. Pelo Exercício 7, a série dada é convergente.

***c*)**

$$a_n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ fatores}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{k \text{ fatores}} \text{ se } n = 2k \\ \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k+1 \text{ fatores}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{k \text{ fatores}} \text{ se } n = 2k+1 \end{cases}$$

Segue que

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt{ab}, \text{ se } n = 2k \\ \sqrt{ab}\ \sqrt[(4k+2)]{\dfrac{a}{b}} \text{ se } n = 2k+1 \end{cases}$$

Olhando para a expressão de a_n resulta, para $n \geqslant 2,\ a < \sqrt[n]{a_n} < b < 1.$ Daí, para $n \geqslant 2$, $0 < a_n < b^n$. A convergência da série segue por comparação com a série geométrica convergente $\sum_{n=0}^{\infty} b^n.$

***d*)** À mesma conclusão chega-se olhando para a expressão de $\sqrt[n]{a_n}$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{ab}.$

Como $\sqrt{ab} < 1$, pelo critério da raiz, a série é convergente.

***e*)** Este exemplo nos mostra que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ pode existir sem que exista o limite

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}.$

Exercícios 3.5

1. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\, e^{n+1}} \dfrac{n!\, e^n}{n^n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \dfrac{1}{e}.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e} = 1.$$

Logo, o critério da razão nada revela. Utilizando o critério de Raabe,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{e}\right) = (\infty \cdot 0)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{n}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Usando a regra de L'Hospital (duas vezes) temos que o limite acima é $-1/2 < 1$ (veja Exercício 2(s) da Seção 1.1 no Capítulo 1). Pelo critério de Raabe, a série é divergente.

2. $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n(2n+2)} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

O critério da razão nada revela.

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{2n+1}{2n+2}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Pelo critério de Raabe, a série é divergente.

3. $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (-1)\cdot \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\alpha+1)} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = -\frac{(\alpha-n)}{(n+1)}$$

Pelo critério de Raabe,

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1+\frac{(\alpha-n)}{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty} (1+\alpha)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1+\alpha.$$

Como $0 < \alpha < 1$, temos $(1 + \alpha) > 1$ e a série dada é convergente.

4. Pelo Exercício 3, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. Portanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (condição necessária para convergência).

Daí, $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} = 0.$

5. Voltando ao Exercício 11c (Exercícios 3.2), observamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\right|}_{a_n}.$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ é alternada.

Como a seqüência a_n é decrescente (Exercício 11b (Exercícios 3.2)) e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$ é uma série alternada convergente.

6. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left| \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \dfrac{n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)} \right| =$

$= \left| \dfrac{n-\alpha}{n+1} \right|$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$ o critério da razão não decide.

Utilizamos então o critério de Raabe.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{n-\alpha}{n+1}\right|\right) = (\alpha+1) \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = (\alpha+1).$$

Se $\alpha + 1 > 1$, ou seja, $\alpha > 0$ a série é convergente.
Se $\alpha + 1 < 1$, ou seja, $\alpha < 0$ a série é divergente.

7. Seja a_k uma seqüência de termos estritamente positivos tal que

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = L,\ L > 0.$$

De $1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{L}{k} + \dfrac{k\left(1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right) - L}{k}$ segue $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = 1.$

Vamos aplicar o critério de Raabe à série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^m$. Lembrando que

$(1 - x^m) = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})$, resulta

$$\lim_{k\to\infty} k\left[1 - \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^m\right] = \lim_{k\to\infty} \underbrace{k\left[1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right]}_{L} \underbrace{\left[1 + \frac{a_{k+1}}{a_k} + \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^{m-1}\right]}_{m}$$

Portanto, existe um natural $m > \dfrac{1}{L}\ (L > 0)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} k\left[1 - \left(\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right)^m\right] > 1.$

Pelo critério de Raabe, a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^m$ é convergente. Conseqüentemente, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k^m = 0$ (condição necessária para convergência). Segue que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0.$

8. Seja a_k, $k \geqslant 0$, uma seqüência de termos estritamente positivos tal que

$$\lim_{k\to\infty} a_k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)=L,\ L<0.$$

Segue da hipótese que existe k_0 tal que para todo $k \geqslant k_0$, $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}>1$. Então, para $k \geqslant k_0$, $a_{k+1} > a_k$. Logo, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ não pode ser zero.

9. ***a)*** $\lim\limits_{k\to\infty} k\left(1-\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right)=\lim\limits_{k\to\infty} k\left(1-\left|\dfrac{k-\alpha}{k+1}\right|\right)=(1+\alpha)$

Utilizando o Exercício 7, Exercícios 3.5.
Se $(1 + \alpha) > 0$, ou seja, $\alpha > -1$, então $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0.$
Utilizando o Exercício 8, Exercícios 3.5, se $1 + \alpha < 0$ e, portanto, $\alpha < -1$, então $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0.$

10. Queremos estudar a série alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, a_n$, onde

$a_n = \dfrac{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$ dado. Vamos precisar calcular o limite de a_n bem como estudar tal seqüência com relação a crescimento ou decrescimento. Para isso, vamos pedir ajuda ao critério de Raabe. Temos

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(2n+3)n^{\alpha}}{(2n+2)(n+1)^{\alpha}}$. Segue que $n\left[1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right]=\dfrac{1-\dfrac{2+3x}{2(1+x)^{\alpha+1}}}{x}$, onde $x=\dfrac{1}{n}$.
Aplicando L'Hospital, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\dfrac{2+3x}{2(1+x)^{\alpha+1}}}{x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{6(1+x)^{\alpha+1}-2(2+3x)(\alpha+1)(1+x)^{\alpha}}{4(1+x)^{2\alpha+2}}=\frac{2\alpha-1}{2}.$$

Para $\alpha<\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right]<0$, logo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (Exercício 8 da Seção 3.5) e, portanto, a série é divergente.

Para $\alpha > \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right] > 0$ e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (Exercício 7, Seção 3.5).
Pelo fato de este limite ser estritamente positivo, existirá um n_0, tal que, para $n \geqslant n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Então, para $n \geqslant n_0$, a seqüência a_n será decrescente. Logo, para $\alpha > \frac{1}{2}$, a série alternada dada será convergente.

Para $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 1$ (Exercício 21 da Seção 2.1), logo, a série é divergente.

11. Olhando para a solução do Exercício 10 temos:
para $\alpha > \frac{3}{2}$, a série será convergente;
para $\alpha < \frac{3}{2}$, será divergente;
para $\alpha = \frac{3}{2}$, precisamos do critério de De Morgan, que será tratado na próxima seção.

3.6

2. $\ln k\left[k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)-1\right] = k\ln k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}-\frac{1}{k}\right) = -m\ln m\left[\frac{1-f\left(\frac{1}{m}\right)-m}{m^2}\right]$, onde

$m = \frac{1}{2}$ e $f(k) = \frac{a_{k+1}}{a_k}$. Fazendo $g(m) = f\left(\frac{1}{m}\right)$, resulta

$$\lim_{k\to\infty} \ln k\left[k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)-1\right] = \underbrace{\lim_{m\to 0^+} -m\ln m}_{0}\ \underbrace{\lim_{m\to 0^+} \frac{1-g(m)-m}{m^2}}_{L} = 0$$

pois $\lim\limits_{m\to 0^+} m\ln m = 0$. Pelo critério de De Morgan, a série será divergente.

3. (*Critério de Gauss*)

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1 = \frac{(c_1-b_1-1)n^k+(c_2-b_2-1)n^{k-1}+\ldots+(c_k-b_k-1)n}{n^k+c_1n^{k-1}+c_2n^{k-2}+\ldots+c_k}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right] = c_1-b_1-1, \text{ desde que } c_1-b_1-1 \neq 0,$$

e

$$\lim_{n \to \infty} \ln n = +\infty$$

segue

$$\lim_{n \to \infty} \ln n \left[n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) - 1 \right] = \begin{cases} +\infty & \text{se } c_1 - b_1 - 1 > 0 \\ -\infty & \text{se } c_1 - b_1 - 1 < 0. \end{cases}$$

Por outro lado, se $c_1 - b_1 - 1 = 0$, pelo fato de $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, teremos, também,

$$\lim_{n \to \infty} \ln n \left[n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) - 1 \right] = 0. \text{ (Verifique.)}$$

Pelo critério de De Morgan, a série será convergente se $c_1 - b_1 > 1$ e divergente se $c_1 - b_1 \leqslant 1$.