CAPÍTULO 4

Exercícios 4.2

1. *b*) Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Para $x = 0$, a série converge. Para $x \neq 0$, vamos utilizar o critério da razão

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Portanto, a série converge para todo x.

***c*)** Seja a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$.

Para $x = 0$, a série converge. Para $x \neq 0$, vamos aplicar o critério da razão

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\ln (n+1)} \cdot \frac{\ln n}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{\ln n}{\ln (n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = |x| \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = |x|.$$

Logo, $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ é convergente.

Para $x = 1$ temos a série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ que, já sabemos, é divergente (pelo critério do limite, Exemplo 9 da Seção 3.2).

Para $x = -1$, temos a série alternada convergente $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

Portanto, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ é convergente para $-1 \leqslant x < 1$.

e) Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$.

Para $x \geqslant 0$, a série é divergente (critério do termo geral).
Para $x < 0$, aplicamos o critério da raiz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{nx}} = e^x$$

Se $e^x < 1$, ou seja, $x < 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$ é convergente. Observe que se trata de uma série geométrica de razão e^x.

f) Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$.

Para $x = 0$, a série é convergente.
Para $x \neq 0$, vamos aplicar o critério da razão

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\,x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = |x| \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|x|}{e}$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$ é convergente para $\frac{|x|}{e} < 1$, ou seja, $|x| < e$. Para $|x| = e$, veja Exercício 5, da Seção 3.4.

g) Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot x^{2n}$

Para $x = 0$, a série é convergente.
Para $x \neq 0$, vamos aplicar o critério da razão

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \; \frac{x^{2n+1}}{x^{2n}} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n+1}{2n+2} \right| = |x|$$

Se $|x| < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n} \cdot x^{2n}$ é convergente.

Se $|x| = 1$, a série é divergente (critério de Raabe).

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n} x^{2n}$ é convergente para $|x| < 1$.

h) Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Para $x = 0$, a série é convergente. Para $x \neq 0$, aplicamos o critério da razão

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)\,(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n) \cdot (2n+2)} \cdot \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)} \cdot \frac{(2n+1)}{x^{2n+1}} \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right| \cdot x^2 = x^2$$

Pelo critério da razão, a série é convergente para $x^2 < 1$.

Se $|x| = 1$, a série é convergente (critério de Raabe).

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ é convergente para $|x| \leqslant 1$.

2. *a*) O domínio de f é o conjunto dos x para os quais a função é convergente.

Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$.

Para $x = 0$, a soma da série é zero. Logo, convergente. Para $x \neq 0$, aplicamos o critério da razão

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = |x| \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$$ e a série é divergente.

Logo, Dom $f = \{0\}$.

d) Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^n$.

Se $x = 0$, a série converge.
Se $x \neq 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^n}\ \frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} 2|x| = 2|x|.$$

Logo, a série converge para $|x| < \frac{1}{2}$.

Para $|x| = \frac{1}{2}$, a série é divergente. (Critério do termo geral para divergência.)

Portanto, Dom $f =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

3. *b*) Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

A série é convergente para $|x| < 1$. (Verifique.)

Temos $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n + ... =$

$$= (x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...) + (x^2 + x^3 + ... + x^n + ...) +$$
$$+ (x^3 + ... + x^n + ...) + ...$$

Logo, $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} + \frac{x^3}{1-x} + ... = \frac{\frac{x}{1-x}}{1-x}$.

Daí, $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, |x| < 1$.

4. *b*) Seja $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+2} = 0.$$

Como $L = 0 < 1$, segue do critério da razão que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ é convergente

para todo x, e então $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ é absolutamente convergente, sendo, pois, convergente para todo x.

5. ***a***) Seja *f* derivável até a ordem $(n + 1)$ no intervalo *I* e sejam x, $x_0 \in I$. Então, existe $\bar{x} \in \,]x_0, x[$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + $$
$$+ \frac{f^{n+1}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

(Fórmula de Taylor com resto de Lagrange, Seção 16.3, vol. I, 5.ª edição)

Sendo $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$, para todo x, existe $\bar{x}$ entre 0 e x tal que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Se $x > 0$, $e^{\bar{x}} < e^x$, pois $\bar{x} \in \,]0, x[$. Logo,

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n\right)\right| < e^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, pelo confronto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n\right) = e^x.$$

Se $x < 0$, $e^{\bar{x}} < e^0 = 1$, pois $\bar{x} \in \,]x, 0[$. Logo,

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n\right)\right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

De $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, segue

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n\right) = e^x$$

Portanto, para todo x, temos

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ..., \text{ ou seja,}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Observação:

Como a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ é convergente para todo x, então $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para todo x.

b) Seja $f(x) = \text{sen } x$.

Temos

$$\text{sen } x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n +$$
$$+ \frac{f^{n+1}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1},\ \bar{x} \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Como $\left|f^{n+1}(x)\right| = |\text{sen } x|$ ou $\left|f^{n+1}(x)\right| = |\cos x|$, segue $\left|f^{n+1}(x)\right| \leqslant 1$, para todo x. Logo,

$$\frac{\left|f^{n+1}(\bar{x})\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Então, para todo x,

$$\left|\text{sen } x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Portanto, $\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

6. Critério da raiz para série de termos quaisquer. Considere a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Suponha que

$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ exista, finito ou infinito. Seja $L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

a) Se $L < 1$, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ será convergente.

Supondo $L < 1$, existe um r tal que $L < r < 1$. Como $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L$, existe N tal que,

para $k > N$, $\sqrt[k]{|a_k|} < r$.

Portanto, se $k > N$, resulta $0 \leqslant a_k < r^k$.

Temos que $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ é convergente $(0 < r < 1)$.

Pelo critério de comparação, resulta que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ é convergente. Logo, $\sum_{k=0}^{n} a_k$ é, também, convergente.

***b*)** Se $L > 1$ ou $L = +\infty$, a série será divergente.

Supondo $L > 1$, existe N tal que, para todo $k \geqslant N$, $1 \leqslant \sqrt[k]{|a_k|}$, ou seja $|a_k| \geqslant 1$, para todo $k \geqslant N$.

Como não poderemos ter $\lim_{k \to \infty} |k| = 0$, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ será divergente.