Capítulo 5

Exercícios 5.1

1. *a*) $|a_2 - a_1| \overset{\text{(def)}}{=} |T(a_1) - T(a_0)| \overset{(T \text{ é contração})}{\leqslant} \lambda |a_1 - a_0|, 0 < \lambda < 1.$

Portanto,
$|a_2 - a_1| \leqslant \lambda |a_1 - a_0|$

***b*)** $|a_3 - a_2| \overset{\text{(def)}}{=} |T(a_2) - T(a_1)| \overset{\text{(def)}}{=} |T(T(a_1) - T(T(a_0))| \overset{(T \text{ é contração})}{\leqslant}$

$$\leqslant \lambda |T(a_1) - T(a_0)| \overset{(T \text{ é contração})}{\leqslant} \lambda^2 |a_1 - a_0|$$

Portanto,
$|a_3 - a_2| \leqslant \lambda^2 |a_1 - a_0|.$

***c*)** Vamos fazer a prova por indução. Pelo item a, a afirmação é verdadeira para $n = 1$. Supondo, agora, $|a_n - a_{n-1}| \leqslant \lambda^{n-1} |a_1 - a_0|, n \geqslant 2,$ vem
$|a_{n+1} - a_n| = |T(a_n) - T(a_{n-1})| \leqslant \lambda |a_n - a_{n-1}| \leqslant \lambda^n |a_1 - a_0|.$

Portanto,
$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \lambda^n |a_1 - a_0|, n \geqslant 1.$

***d*)** $|a_{n+2} - a_n| = |a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n| \leqslant$

$$\leqslant |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| = |T(a_{n+1}) - T(a_n)| + |T(a_n) - T(a_{n-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda |a_{n+1} - a_n| + \lambda |a_n - a_{n-1}| \leqslant$$

(por *c*)

$$\leqslant \lambda \cdot \lambda^n |a_1 - a_0| + \lambda \, \lambda^{n-1} |a_1 - a_0| = (\lambda^{n+1} + \lambda^n) |a_1 - a_0|$$

Portanto,
$|a_{n+2} - a_n| \leqslant [\lambda^{n+1} + \lambda^n] |a_1 - a_0|.$

$$
\begin{aligned}
\textit{\textbf{e}}) \; \left|a_{n+p}-a_n\right| &= \left|a_{n+p}-a_{n+p-1}+a_{n+p-1}-a_{n+p-2}+\ldots+a_{n+1}-a_n\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|a_{n+p}-a_{n+p-1}\right| + \left|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}\right| + \ldots + \left|a_{n+1}-a_n\right| \leqslant \\
&\leqslant \lambda^{n+p-1}\left|a_1-a_0\right| + \lambda^{n+p-2}\left|a_1-a_0\right| + \ldots + \lambda^n\left|a_1-a_0\right| = \\
&= [\lambda^{n+p-1}+\lambda^{n+p-2}+\ldots+\lambda^n]\left|a_1-a_0\right|.
\end{aligned}
$$

$$
\textit{\textbf{f}}) \; \left|a_{n+p}-a_n\right| \leqslant [\underbrace{\lambda^{n+p-1}+\lambda^{n+p-2}+\ldots+\lambda^{n+1}+\lambda^n}_{\leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}}] \cdot \left|a_1-a_0\right| (0 \leqslant \lambda < 1)
$$

Portanto,

$$\left|a_{n+p}-a_n\right| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\left|a_1-a_0\right|.$$

2. Seja a seqüência a_n, $n \geqslant 0$, dada por $a_n = T(a_{n-1})$, $n \geqslant 1$, onde T: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma contração, isto é, existe λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, tal que $\left|T(x)-T(y)\right| \leqslant \lambda\left|x-y\right|$.
Logo, temos

$\left|a_{n+p}-a_n\right| \leqslant \dfrac{\lambda^n}{1-\lambda}\left|a_1-a_0\right|$, para todo natural n e todo natural p (por (1) *f*).

Como $0 < \lambda < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda^n}{1-\lambda}\left|a_1-a_0\right| = 0$, logo, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\left|a_1-a_0\right| < \varepsilon.$$

E, assim, para n e p quaisquer, temos

$$n > n_0 \Rightarrow \left|a_{n+p}-a_n\right| < \varepsilon.$$

Portanto, a seqüência a_n é de Cauchy. Pelo Teorema 1, toda seqüência de Cauchy é convergente. Logo, existe um número real a tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

4. Seja a seqüência a_n, $n \geqslant 0$, dada por $a_n = T(a_{n-1})$, $n \geqslant 1$.
Pelo Exercício 2, a seqüência a_n é de Cauchy e, portanto, existe um número real a tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pelo Exercício 3, a contração T é contínua. Segue que

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} T(a_{n-1}) = T(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}) = T(a).$$

Daí, $a = T(a)$.

5. Seja T: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma contração.
Então existe um real λ, com $0 \leqslant \lambda < 1$, tal que, quaisquer que sejam os reais x e y,
$|T(x) - T(y)| \leqslant \lambda |x - y|$.

Pelo Exercício 4, T admite um ponto fixo.
Suponha, agora, (por absurdo) que a e b, $a \neq b$, são pontos fixos para T. Então, por definição,
$a = T(a)$ e $b = T(b)$. Como T é contração, segue que $|T(a) - T(b)| \leqslant \lambda |a - b|$. Como a e b são pontos fixos, temos
$|a - b| \leqslant \lambda |a - b|$. Daí, $\lambda \geqslant 1$, o que contraria a hipótese. Logo, se T for uma contração, então T admitirá somente um ponto fixo.

6. Seja T: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = \text{arc tg } \dfrac{x}{2}$.
Pelo TVM, existe c no intervalo aberto de extremidade x e y tal que

$$T(x) - T(y) = T'(c)(x - y) = \frac{2c}{4 + c^2}(x - y).$$

Como o valor máximo de $\left|\dfrac{2x}{4 + x^2}\right|$ é $\dfrac{1}{2}$ (verifique) segue que, quaisquer que sejam x e y,

$$|T(x) - T(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

Logo, T é uma contração. Como $T(0) = 0$ e T é contínua, segue que 0 é o único ponto fixo da função.

7. Seja T: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^2 + 3x$.

T admite dois pontos fixos $a = 0$ e $a = -2$, pois $T(0) = 0$ e $T(-2) = -2$.
Como T é contínua e admite dois pontos fixos, então T não é contração.

Exercícios 5.2

1. Pelo critério de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, quaisquer que sejam os naturais n e p, $p \geqslant 1$,

$$n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Em particular, para $p = 1$,

$$n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon$$

que é equivalente a $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

2. Sendo $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ convergente, pelo critério de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que, quaisquer que sejam os naturais n e p, $p \geqslant 1$, tem-se

$$n > n_0 \Rightarrow |a_{p+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Tendo em vista a desigualdade,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}|$$

segue que temos, também, quaisquer que sejam n e p, $p \geqslant 1$,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon, \text{ para } n > n_0.$$

Logo, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é convergente.

Exercícios 5.3

1. *a*) Seja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen } kx}{k}$

Consideremos as seqüências $a_k = \frac{1}{k}$ e $b_k = \text{sen } kx$.
Temos

$$\text{sen } x + \text{sen } 2x + ... + \text{sen } kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos (k + \frac{1}{2})\, x}{2 \text{ sen } \frac{x}{2}} \text{ (veja o Exemplo 3)}$$

ou seja

$$\text{sen } x + \text{sen } 2x + ... + \text{sen } kx = \frac{\text{sen}\left(\frac{k+1}{2}\, x\right) \text{sen}\left(\frac{k}{2}\, x\right)}{\text{sen } \frac{x}{2}}$$

(pois $\cos a - \cos b = 2 \text{ sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{b-a}{2}\right)$).

Para $x \neq 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ temos

$$\left|\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + ... + \operatorname{sen} kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\operatorname{sen} \frac{x}{2}\right|} \qquad \left(\operatorname{sen} \frac{x}{2} \neq 0\right).$$

Logo, as seqüências $a_k = \dfrac{1}{k}$ e $b_k = \operatorname{sen} kx$ satisfazem as condições do critério de Dirichlet e, portanto, a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$ é convergente.

2. Seja a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} k|}{k}$.

Temos $|\operatorname{sen} k| \geqslant \operatorname{sen}^2 k$ e $\operatorname{sen}^2 k = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2k$.

Portanto, $\left(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{2k}\cos 2k\right) \leqslant \dfrac{|\operatorname{sen} k|}{k}$.

Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k}\cos 2k\right)$ é divergente segue, pelo critério de comparação, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} k|}{k}$ é divergente. (*Observe*: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ é divergente e, pelo item b do exercício anterior, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k}$ é convergente, logo $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k} - \frac{\cos 2k}{2k}\right)$ é divergente.)

3. ***b***) Seja a série $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos k}{\ln k}$

Consideremos $a_k = \dfrac{1}{\ln k}$ e $b_k = \cos k$.

A seqüência a_k é decrescente e $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = |\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n| \leqslant \frac{1}{2\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}\right|} + \frac{1}{2} \quad \text{(veja o Exercício 1).}$$

Portanto, pelo critério de Dirichlet, a série $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos k}{\ln k}$ é convergente.

c) Seja a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k^2}$.

Consideremos a $a_k = \dfrac{1}{k^2}$. Logo, a_k é decrescente e $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Seja b_k a seqüência 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1 -1, 1, 1, 1, 1, ...
Logo,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant 4$$

Segue, do critério de Dirichlet, a convergência da série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k^2}$.

d) Seja a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{k}}$

Consideremos $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ e $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

Temos que a_k é decrescente e $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right| &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

Logo, $\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right| \leqslant 1.$

As seqüências a_k e b_k satisfazem as condições do critério de Dirichlet.

Logo, a série $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ é convergente.

4. ***a***) $|B_n|$ é limitada e a_n tende a zero, logo, $B_n a_n$ tende a zero.

b) Como a_n tende a zero, a série telescópica $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$ é convergente e igual a a_0.

c) Imediato.

d) A série $\sum_{k=0}^{\infty} B_k(a_k - a_{k+1})$ é convergente, pois é majorada pela série convergente

$\sum_{k=0}^{\infty} B(a_k - a_{k+1}).$

e) Tendo em vista a identidade de Abel, segue que a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ é convergente e

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(a_k - a_{k+1}).$$

Esta demonstração do critério de Dirichlet é muito mais elegante, não? E, também, parece-me, muito mais natural. Honras e mais honras para Abel!!!

5. No critério de Abel impomos mais sobre a série e menos sobre a seqüência, enfraquecemos a hipótese sobre a seqüência a_k, mas em compensação exigimos que a série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ seja convergente.

Como, por hipótese, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ é convergente, segue que a seqüência $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ é convergente. Sendo a seqüência a_k crescente (ou decrescente) e limitada, tal seqüência será, também, convergente e, digamos, com limite a. Segue que a série telescópica

$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$ é convergente e com soma $a_0 - a$. Segue, também, que tal série é absolutamente convergente e a soma $\sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k - a_{k+1} \right|$ será $a - a_0$, se a_k for crescente e $a_0 - a,$ se a_k for decrescente. Sendo a seqüência B_n convergente, ela será limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\left| B_n \right| \leqslant M$ para todo natural n. Deste modo, a série $\sum_{k=0}^{\infty} B_k \, (a_k - a_{k+1})$ é convergente, pois é majorada pela série convergente $\sum_{k=0}^{\infty} B \left| a_k - a_{k+1} \right|$. Assim, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = \lim_{n \to \infty} B_n a_n + \sum_{k=0}^{\infty} B_k (a_k - a_{k+1})$.

Cuidado. A única hipótese sobre a série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ é que ela seja convergente, mas poderá ser uma série de termos quaisquer.