CAPÍTULO 6

Exercícios 6.1

2. Da hipótese e tendo em vista o critério de Cauchy para seqüência numérica, segue que para cada x em B a seqüência numérica $f_n(x)$, $n \geqslant 1$, é convergente. Assim, para cada x em B existe um número $f(x)$ para o qual tal seqüência converge. A função $f: B \to \mathbb{R}$ assim definida é tal que, para todo x em B,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Exercícios 6.2

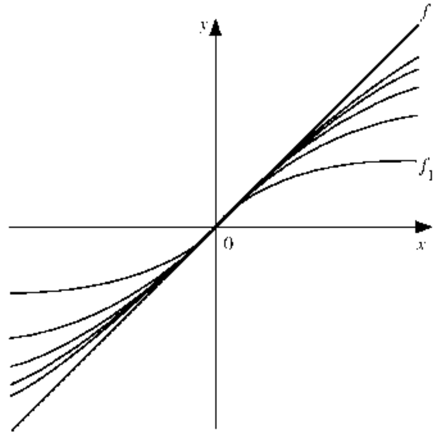
4. ***a***) O domínio de f é o conjunto de todos os x para os quais a seqüência $f_n(x) = n \text{ arc tg } \dfrac{x}{n}$ converge.

Temos:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} n \text{ arc tg } \frac{x}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\text{arc tg } \frac{x}{n}}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{-\frac{x}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + x^2 / n}}{-1 / n^2} = x$$

Logo, $D(f) = \mathbb{R}$.



b) Seja $h(x) = x - n \text{ arc tg } \dfrac{x}{n}$

Temos $h'(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + n^2} \geqslant 0.$

Então, h é crescente em $[0, +\infty[$. Segue que, para todo $x \in [0, r]$,

$0 \leqslant x - n \text{ arc tg } \dfrac{x}{n} \leqslant r - n \text{ arc tg } \dfrac{r}{n}.$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} (r - n \text{ arc tg } \dfrac{r}{n}) = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$n > n_0 \Rightarrow \left| r - n \text{ arc tg } \dfrac{r}{n} \right| < \varepsilon.$

Segue que, para todo $x \in [-r, r]$,

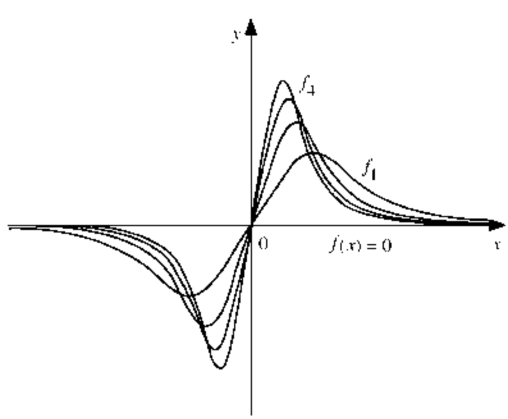
$n > n_0 \Rightarrow \left| x - n \text{ arc tg } \dfrac{x}{n} \right| < \varepsilon.$

Portanto, a seqüência $f_n(x) = n \text{ arc tg } \dfrac{x}{n}$ converge uniformemente a $f(x) = x$ em $[-r, r]$.

c) Como, para todo $n > n_0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left| x - n \text{ arc tg } \dfrac{x}{n} \right| = \infty$

resulta que, dado ε, não existe n_0 (que só depende desse ε) que torne verdadeira a afirmação para todo $x \in \mathbb{R}$, $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Portanto, a convergência não é uniforme em $\mathbb{R}$.

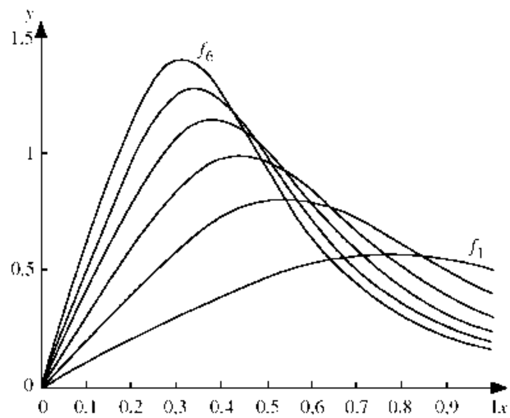
6. ***a***) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1 + n^2x^4} = 0$



b) O valor máximo de $f_n(x)$ em $[0, 1]$ é $\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{n^2}{3}}$ e ocorre para $x = \sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}$, $n \geqslant 1$;

$x = \sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}$ pertence a [0, 1] e $\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{n^2}{3}}$ tende a ∞ quando n tende a ∞. Assim,

marcando uma faixa em torno do gráfico de f, $0 \leqslant x \leqslant 1$, de amplitude 2ε, $\varepsilon > 0$, sempre existe uma f_n cujo gráfico sai da faixa.



Então, f_n não converge uniformemente a f em [0, 1].

c) Temos

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int_0^1 f(x)\, dx = 0 \quad ①$$

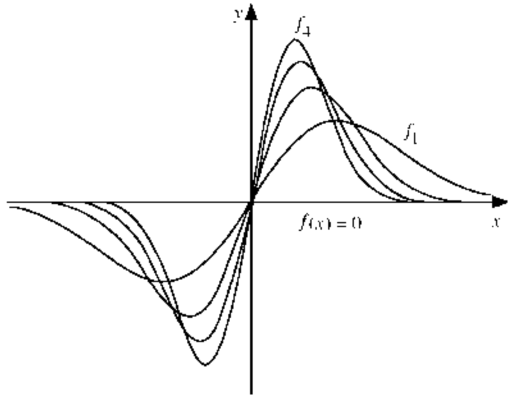
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2nx}{1+n^2x^4}\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\text{arc tg } nx^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\text{arc tg } n - \text{arc tg } 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}. \quad ②$$

De ① e ②, segue $\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$

7. ***a***) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx\, e^{-nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = 0.$



Então, $f(x) = 0$, para todo x.

b) Seja $x = \dfrac{1}{n} \in [0, 1]$

$$(f_n - f)(x) = (f_n - f)\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n}\right) \cdot e^{-n\cdot\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e^{-\frac{1}{n}} \text{ e } \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$$

Se $f_n \to f$ uniformemente em [0, 1], dado $0 < \varepsilon < 1$, existiria n_0 tal que, para todo $x \in [0, 1]$, $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Em particular, para $x = \dfrac{1}{n} \in [0, 1]$ deveríamos ter $\left|f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) - f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| < \varepsilon.$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) - f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1$, então f_n não converge uniformemente em [0, 1].

c) Temos $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}\right) dx = 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}\, dx = \left(-\frac{1}{2}\right) \lim_{n\to\infty} \left[e^{-nx^2}\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)(e^{-n} - 1) = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}\right) dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}\, dx.$$

Exercícios 6.3

1. Temos $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{nx}{nx^2+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x}{x^2+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{x}$.

Pela Observação 2 do Teorema 1 desta seção, como cada $f_n = \dfrac{nx}{nx^2+1}$ é contínua em $x_0 = 0$, mas $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não é contínua em $x_0 = 0$, então f_n não converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$.

2. Veja Exercício 4 da Seção 6.2.

3. $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \text{ se } x \text{ for racional} \\ -\dfrac{1}{n}, \text{ se } x \text{ for irracional} \end{cases}$, $n \geqslant 1$.

Para todo x,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

As f_n são descontínuas em todos os pontos, mas f é contínua.

4. $f(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = \dfrac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{e^{nx^2}} = 0.$

a) $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^1 (-2nx)(e^{-nx^2})\, dx =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \lim_{n\to\infty} \left[e^{-nx^2}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2}\right) \lim_{n\to\infty} \left[e^{-n} - 1\right] = \frac{1}{2}$$

b) Seja f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = 0$,

onde cada $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ é contínua em $[0, 1]$.

Nestas condições, pelo Teorema 2, se f_n convergisse uniformemente a f em $[0, 1]$, então $\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

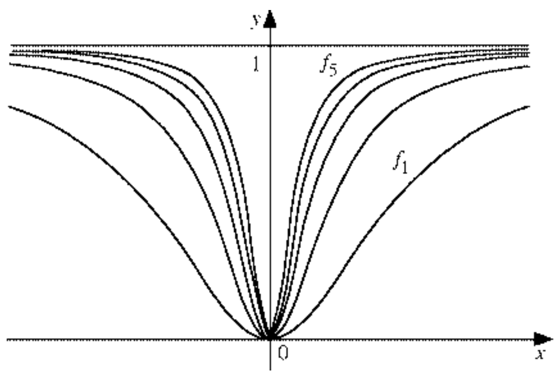
Como $\int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{f(x)}\, dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ (item *a*)

então, f_n não converge uniformemente a f em [0, 1].

5. Seja $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$. Temos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} = 1,\ x \neq 0, \text{ e } f(0) = 0.$$

Observe que f é limitada e descontínua em apenas $x = 0$, logo integrável em $[-1, 1]$.
Daí, $\int_{-1}^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \int_{-1}^1 dx = 2$.



Por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{nx - \operatorname{arc\,tg} nx}{n} \right]_{-1}^1 = 2.$$

Portanto,

$$\int_{-1}^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 f_n(x)\, dx.$$

Vamos mostrar que a seqüência de funções f_n, $n \geqslant 1$, onde $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$ não converge uniformemente a $f(x) = 1$ em $[-1, 1]$. Como os gráficos das f_n ficam longe do gráfico de f para um x pequeno, seja $x_n = \dfrac{1}{n} \in [-1, 1]$.

Então, como $(f - f_n)(x) = 1 - \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2} = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$,
temos

$$\lim_{n\to\infty} (f - f_n)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0. \quad ①$$

Portanto, a convergência não é uniforme.
(Se f_n convergisse uniformemente em $[-1, 1]$, dado $\varepsilon > 0$, existiria n_0 tal que para todo $x \in [-1, 1]$, $n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Em particular, isto seria válido para $x = x_n$, e daí $\lim\limits_{n\to\infty} (f - f_n)(x_n) = 0$, o que contradiz ①.)

6. Seja $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ sen nx.

Temos $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \text{ sen } nx = 0$.

Como $|\text{sen } nx| \leqslant 1$, segue que $\left|\dfrac{1}{n} \text{ sen } nx\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Tomando n_0 tal que $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$ (n_0 só depende de ε), resulta

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} \text{ sen } nx\right| < \varepsilon \text{ para todo } x \text{ real.}$$

Portanto, a seqüência dada converge uniformemente para $f(x) = 0$, pois, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 (que só depende de ε) $\left(\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon\right)$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} \text{ sen } nx - 0\right| \leqslant \varepsilon.$$

Sejam $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ sen nx,
$f(x) = 0, f'(x) = 0$ e
$f_n(x) = \cos nx$.

Para $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$ não existe.

Portanto, não é verdade que para todo x, $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

O Teorema 3 exige que f_n' seja uniformemente convergente, o que não ocorre com a seqüência f_n; logo, o resultado não está em contradição com o teorema citado.