CAPÍTULO 7

Exercícios 7.3

1. ***b***) Para todo $x \in [-r, r]$, temos $\left| x \right| \leqslant r$. Logo, para todo $x \in [-r, r]$ e para todo natural $k \geqslant 1$, temos

$$\left| \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{r^k}{k!} = a_k.$$

Temos $L = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{r^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \dfrac{k!}{r^k} = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{r}{(k+1)} = 0.$

Como $L < 1$, a série numérica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k!}$ é convergente.

Nestas condições, pelo critério M de Weierstrass, a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge uniformemente em $[-r, r]$, para todo $r > 0$.

c) $\left| 2^k \ x^k \right| \leqslant 2^k r^k$, para $0 < x < \dfrac{1}{2}$.

Pelo critério da razão,

$\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{2^{k+1} \cdot r^{k+1}}{2^k r^k} = 2r < 1$, pois $0 < r < \dfrac{1}{2}$.

Portanto, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k r^k$ é convergente.

Segue, do critério M de Weierstrass, que a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^k$ converge uniformemente em $[-r, r]$, com $0 < r < \dfrac{1}{2}$.

d) Para todo $x \in [-r, r]$, $0 < r < 1$, e para todo natural $k \geqslant 1$, temos

$$\left|\frac{x^k}{2k+1}\right| \leqslant \frac{r^k}{2k+1}$$

A série numérica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{2k+1}$ $(0 < r < 1)$ é convergente (pois, pelo critério da razão,

$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{r^{k+1}}{2k+3}\cdot\frac{2k+1}{r^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+3}\cdot r = r < 1$).

Segue, do critério *M* de Weierstrass, que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}$ converge uniformemente em $[-r, r]$, com $0 < r < 1$.

3. Seja $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\, x^k$.

Como a série $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)r^k$ é convergente para $0 \leqslant r < 1$ e para $|x| \leqslant r$,

$|(k+1)x^k| \leqslant (k+1)r^k$, segue que a série $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x^k$ é uniformemente convergente

em $[-r, r]$, $0 \leqslant r < 1$, à função $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x^k$. Assim, em $[-r, r]$, $0 \leqslant r < 1$, é válida a integração termo a termo:

$$\int_0^t s(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (k+1)x^k\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} t^{k+1} = \frac{t^2}{1-t}, |t| < 1.$$

Temos

$$\frac{d}{dt}\int_0^t s(x)dx = \frac{d}{dt}\frac{t^2}{1-t} = \frac{2t-t^2}{(1-t)^2}.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, $\frac{d}{dt}\int_0^t s(x)dx = s(t)$, logo,

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$$

7. ***a***) Sendo $f(x) = x^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, uma função par, $f(x)$ sen nx será uma função ímpar, daí teremos $b_n = 0$, para $n \geqslant 1$. Assim, a série de Fourier da função dada será da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3} \text{ e } a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x \, dx = \frac{4\cos n\pi}{n^2} = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Segue que a série de Fourier de $f(x) = x^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, é

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx.$$

De $\left|(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx\right| \leqslant \frac{4}{n^2}$, para todo n e para todo x, e pelo critério M de Weierstrass, segue a convergência uniforme, em $\mathbb{R}$, da série de Fourier. (Lembre-se de que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ é convergente.)

b) Seja $f(x) = |x|, -\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Sendo a função f par, a série de Fourier será da forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

Cálculo dos coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \, dx = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x}{n} \text{sen } nx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \text{sen } nx \, dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

Resulta que a série de Fourier da função dada é:

$$\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n-1]}{n^2}\cos nx.$$

Temos $(-1)^n-1=\begin{cases}-2, & \text{se } n \text{ é ímpar}\\ 0, & \text{se } n \text{ é par}\end{cases}$

Então, a série de Fourier pode ser colocada na forma

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Como $\left|\frac{2}{\pi}\frac{[(-1)^n-1]}{n^2}\cos nx\right|\leqslant\frac{4}{\pi n^2}$ para todo x e todo $n\geqslant 1$, segue, do critério M de Weierstrass, que a série dada converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

c) Seja $f(x)=\begin{cases}\pi+x & \text{se} \quad -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ \pi-x & \text{se} \quad 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$

Temos

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\,dx+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\,dx\right]=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}-(\pi-x)\cos nx\,dx=\right.$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left[(\pi+x)\,\frac{\text{sen } nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\text{sen } nx\,dx+\left[(\pi-x)\,\frac{\text{sen } nx}{n}\right]_{0}^{\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\text{sen } nx\,dx\right\}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}(1-\cos n\pi)+\frac{1}{n^2}(1-\cos n\pi)\right]$$

Logo,

$$a_n=\frac{2}{n^2\pi}(1-\cos n\pi),\ \text{para } n=1,2,\ldots$$

Como $f(x)$ é uma função par, $b_n=0$ para $n=1,2,\ldots$
A série de Fourier é

$$\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\pi)}{n^2}\cos nx$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Como $\left|\frac{4}{\pi}\,\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right| \leqslant \frac{4}{\pi(2n-1)^2}$, para todo x e todo natural $n \geqslant 1$, segue, pelo critério M de Weierstrass, que a série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

8. *a*) Seja $f(x)$ definida e de classe C^2 em $[-\pi, \pi]$.
Para cada natural $n \geqslant 1$, temos

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Integrando por partes,

$$a_n = \frac{1}{n}\left\{[f(x)\operatorname{sen} nx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\operatorname{sen} nx\,dx\right\}.$$

O 1.º termo no 2.º membro é zero. Uma segunda integração por partes dá

$$a_n = \frac{1}{n^2}\left\{[f'(x)\cos nx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,dx\right\}.$$

Portanto,

$$a_n = \frac{1}{n^2}\left\{[f'(\pi)-f'(-\pi)]\cos n\pi - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,dx\right\}. \quad ①$$

***b*)** Como f'' é contínua em $[-\pi, \pi]$, $\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|\,dx$ é um número real. De ① segue que

$|a_n| \leqslant \frac{1}{n^2}\left\{|f'(\pi)-f'(-\pi)| + \int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|\,dx\right\}$ e, portanto, para todo $n \geqslant 1$ e para todo x, tem-se

$|a_n \cos nx| \leqslant \frac{M}{n^2}$, onde $M = \left\{|f'(\pi)-f'(-\pi)| + \int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|\,dx\right\}$.

Por aplicação do critério M de Weierstrass segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ é uniformemente convergente.

2. Seja $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{n^2}\right)$.

Temos $\left|\operatorname{sen}\dfrac{x}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}\ x\in[0,1]$.

Pelo critério M de Weierstrass, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{n^2}\right)$ converge uniformemente em [0, 1]. Cada $f_n=\operatorname{sen}\dfrac{x}{n^2}$ é contínua em [0, 1].

Nestas condições, pelo Teorema 2 da Seção 7.4 (integração termo a termo), temos

$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$, ou seja,

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\operatorname{sen}\frac{x}{n^2}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\cos\frac{x}{n^2}\right]_0^1$$

Daí,

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2-n^2\cos\frac{1}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right).$$

4. Seja $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{x^2+n^2}$.

Temos $\left|\dfrac{x}{x^2+n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2},\quad x\in[0,1]$.

Como a série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ é convergente, segue, pelo critério M de Weierstrass que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{x^2+n^2}$ é uniformemente convergente em [0, 1].

As funções $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2 + n^2}$ são contínuas em $\mathbb{R}$ e, então, em [0, 1]. Segue, do Teorema 1 da Seção 7.4, que f é contínua em [0, 1]. Nestas condições, pelo Teorema 2 da Seção 7.4, os símbolos $\int_0^1$ e $\sum_{n=1}^{\infty}$ podem ser permutados.

Daí, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{x^2 + n^2}\,dx =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + n^2)\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{n^2 + 1}{n^2}$$

Portanto,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

5. Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{arc tg}\,\frac{x}{n^2}$.

Temos $\left|\text{arc tg}\,\dfrac{x}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}, \quad x \in [0, 1].$

Pelo critério M de Weierstrass, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{arc tg}\,\frac{x}{n^2}$ converge uniformemente a f em [0, 1]. Cada $f_n(x) = \text{arc tg}\,\dfrac{x}{n^2}$ é contínua em [0, 1]. Portanto, podemos integrar termo a termo uma série uniformemente convergente de funções contínuas.

Daí,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \text{arc tg}\,\frac{x}{n^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \text{arc tg}\,\frac{x}{n^2}\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[x\,\text{arc tg}\,\frac{x}{n^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n^2 x}{n^4 + x^2}\,dx\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \text{arc tg } \frac{1}{n^2} - \left[\frac{n^2}{2} \ln \left(x^2 + n^4 \right) \right]_0^1 \right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \text{arc tg } \frac{1}{n^2} - \frac{n^2}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n^4} \right) \right\}.$$

Logo, a série dada é convergente e tem por soma $\int_0^1 f(x)\, dx$.

6. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$.

a) Aplicando o critério da razão,

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^n}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{x^{n-1}} \right| = |\, x \,|$$

$|\, x \,| < 1 \Rightarrow$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$ é convergente.

Se $L = 1$, o critério nada revela, mas, para $|\, x \,| = 1$, temos as séries

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, que são convergentes.

O domínio de f é o conjunto de todos os x para os quais a série converge, ou seja, $|\, x \,| \leqslant 1$. Portanto,

Dom $f = [-1, 1]$.

b) Temos $\left| \frac{x^{n-1}}{n^3} \right| \leqslant \frac{1}{n^3}$, $x \in [-1, 1]$.

Como a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é convergente, segue, pelo critério M de Weierstrass, que a série converge uniformemente em $[-1, 1]$.

As funções $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{n^3}$ são contínuas. Então, pelo Teorema 1 da Seção 7.4, f é contínua.

c) Como cada $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{n^3}$ é contínua em $[-1, 1]$ e a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n^3}$ converge uniformemente a f em $[-1, 1]$, então, pelo Teorema 2 (integração termo a termo), temos

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}\right]dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} \frac{x^{n-1}}{n^3}\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n^4}\right]_{-1}^{1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4} = 2 + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{5^4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^4}.$$

Logo, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^4}$.

d) Para todo $x \in [-1, 1]$, seja $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n^3}$.

A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)\,x^{n-2}}{n^3}$ converge uniformemente em $[-1, 1]$, pelo critério M de Weierstrass (pois $\left|\dfrac{(n-1)x^{n-2}}{n^3}\right| \leqslant \dfrac{n-1}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, $x \in [-1, 1]$).

Cada $f(x) = \dfrac{x^{n-1}}{n^3}$ é de classe C^1 em $[-1, 1]$.

Nestas condições, pelo Teorema 3 da Seção 7.4 (derivação termo a termo), para todo $x \in [-1, 1]$, segue

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n^3}$$