Capítulo 8

Exercícios 8.1

1. Inicialmente, observamos que $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{nx}$ não é série de potências, logo o teorema desta seção não se aplica. Como, para todo $x < 0$, a série é geométrica e de razão 2^x, $0 < 2^x < 1$, então a série converge absolutamente para todo $x < 0$. Para $x \geqslant 0$ a série é divergente e com soma $+\infty$.

2. Fazendo $u = x - x_0$, temos a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k$, centrada em 0, e que será convergente para $u = x_1 - x_0$. Pelo teorema da seção, tal série será absolutamente convergente para $-r < u < r$, onde $r = |x_1 - x_0|$; segue que a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ será, então, absolutamente convergente para $-r < x - x_0 < r$, e, portanto, absolutamente convergente no intervalo $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Exercícios 8.2

1. ***a)*** $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ é uma série de potências com $a_n = n$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$$

A série converge para todo $x \in]-1, 1[$ e diverge para $|x| > 1$.

Como $\sum_{n=0}^{\infty} n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$ são divergentes, resulta que o domínio de f é $]-1, 1[$.

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ é uma série de potências com $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln n}{\ln (n+1)} \right| = 1$$

A série converge para todo $x \in \,]-1, 1[$ e diverge para $|x| > 1$.

A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ é alternada. Como a seqüência $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$, $n \geqslant 2$, é decrescente e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, segue que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ é convergente.

A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ é divergente (compare com a série harmônica divergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$). Portanto, o domínio de f é $[-1, 1[$.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$ é uma série de potências com a $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right| = 1.$$

A série converge para todo $x \in \,]-1, 1[$ e diverge para $|x| > 1$.

Se $x = 1$, temos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ divergente, pois $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \neq 0$.

Se $x = -1$ temos a série alternada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{n+1}$ que é divergente, pois $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n\, n}{n+1}$ não existe. Portanto, o domínio de f é $]-1, 1[$.

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+3}$ é uma série de potências com $a_n = \dfrac{1}{n^2+3}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2+3}{n^2+3} \right| = 1.$$

A série converge para todo $x \in \,]-1, 1[$ e diverge para $|x| > 1$.

Se $x = -1$, temos a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+3}$ que é convergente. (Veja critério de convergência para séries alternadas.)

Se $x = 1$, temos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$ que é convergente.

(Compare com a série harmônica convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.)

Logo, o domínio de f é $[-1, 1]$.

e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ é uma série de potências com $a_n = 2^n$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{2^{n+1}}\right| = \frac{1}{2}$$

A série converge para todo $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ e diverge para $|x| > \frac{1}{2}$.

Para $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$ temos séries divergentes.

Portanto, o domínio de f é $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ é uma série de potências com $a_n = \frac{1}{n^n}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}\cdot(n+1) = \infty$$

A série converge para todo x.
Portanto, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

4. Consideremos a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e seja $A = \left\{ x \geqslant 0 \mid \lim_{k\to\infty} a_k x^k = 0 \right\}$. Inicialmente, observamos que se $\lim_{k\to\infty} a_k s^k = 0$, $s > 0$, então teremos também $\lim_{k\to\infty} a_k x^k = 0$ para $|x| < s$. De fato, de $|a_k x^k| = |a_k s^k| \left|\frac{x}{s}\right|^k$ e como $\left|\frac{x}{s}\right| < 1$, segue $\lim_{k\to\infty} a_k x^k = 0$. Sendo, então, R o supremo de A, teremos $\lim_{k\to\infty} a_k s^k = 0$ para todo $s \in \,]0, R[$. Se $|x| < R$, existe $s \in \,]0, R[$, tal que $|x| < s$. De $\lim_{k\to\infty} a_k s^k = 0$ segue que tomando-se $0 < \varepsilon < 1$, existe um natural n, tal que $|a_k s^k| \leqslant \varepsilon$ para todo $k \geqslant n$. Então, para $k \geqslant n$, $|a_k x^k| = |a_k s^k| \left|\frac{x}{s}\right|^k \leqslant \varepsilon \left|\frac{x}{s}\right|^k$. Logo, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ é absolutamente convergente, pois a série geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x}{s}\right|^k$ é convergente. Então, para todo x, $-R < x < R$, a série será absolutamente convergente. Por outro lado, para $x > R$ a série não será convergente, pois neste caso teremos $\lim_{k\to\infty} a_k x^k \neq 0$. Portanto, R é o raio de convergência da série.

5. Pelo Exercício 4, temos $A = \left\{ x \geqslant 0 \mid \lim_{n\to\infty} a_n x^n = 0 \right\}$ e o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é o supremo do conjunto A.

Resulta que:

a) $R = \sup \left\{ x \geqslant 0 \mid \lim_{n\to\infty} n^3 x^n = 0 \right\} = \sup\,[0, 1[\, = 1;$

b) $R = \sup \left\{ x \geqslant 0 \mid \lim_{n\to\infty} 2^n x^n = 0 \right\} = \sup \left[0, \frac{1}{2}\right[= \frac{1}{2};$

c) $R = \sup \left\{ x \geqslant 0 \mid \lim_{n\to\infty} n^n x^n = 0 \right\} = \sup\,\{0\} = 0;$

d) $R = \sup \left\{ x \geqslant 0 \mid \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n + 1}{n^4 + 1} \cdot x^n = 0 \right\} = \sup\,[0, 1] = 1.$

6. ***a***) De $|x| < r$, $r > 0$, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} k\left|\frac{x}{r}\right|^k = 0$, pois $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$. Supondo, agora,

$\lim\limits_{k\to\infty} a_k r^k = 0$ observando que $|ka_k x^k| = |a_k r^k| \, |k|\left|\frac{x}{r}\right|^k$, resulta $\lim\limits_{k\to\infty} ka_k x^k = 0$.

b) Supondo $\lim\limits_{k\to\infty} ka_k x^k = 0$ e observando que $a_k x^k = \frac{1}{k}\left(ka_k x^k\right)$, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k x^k = 0$. Tendo em vista o item *a*, conclui-se que $\lim\limits_{k\to\infty} ka_k x^k = 0$ se e somente se $\lim\limits_{k\to\infty} a_k x^k = 0$. Pelo Exercício 4, as séries $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ka_k x^k$ têm o mesmo raio de convergência.

Exercícios 8.3

1. Veja solução do item *b* do Exercício 6 da Seção 8.2.

2. Seja $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ com raio de convergência *R*, $R > 0$ ou $R = +\infty$.

a) Seja $r \in \,]0, R[$. De $\lim\limits_{k\to\infty} a_k r^k = 0$, segue que a seqüência $a_k r^k$, *k* natural, é limitada, logo, existe $M > 0$ tal que $|a_k r^k| \leqslant M$ para todo natural *k*.

b) Sendo $r \in \,]0, R[$, temos $|ka_k x^{k-1}| = \frac{k}{r}|a_k r^k| \, \left|\frac{x}{r}\right|^{k-1} \leqslant \frac{kM}{r}\left|\frac{x}{r}\right|^{k-1}$ para todo $k \geqslant 1$.

c) Pelo Exercício 1, *R* é o raio de convergência da série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k x^k$, logo, a série converge absolutamente para $|x| < R$.

d) Sejam $0 < x < r < s < R$. Olhando para o item *b*, obtemos

$$|ka_k x^{k-1}| = \frac{k}{s}|a_k s^k| \, \left|\frac{x}{s}\right|^{k-1} \leqslant \frac{kM}{s}\left|\frac{x}{s}\right|^{k-1} \leqslant \frac{M}{s} k\left|\frac{r}{s}\right|^{k-1}$$

onde $M > 0$ é tal que $|a_k s^k| \leqslant M$ para todo natural *k*. De $\left|\frac{r}{s}\right| < 1$ segue que a série geométrica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\left|\frac{r}{s}\right|^{k-1}$ é convergente. Então, pelo critério *M* de Weierstrass, a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}$ é uniformemente convergente em $]-r, r[$ para todo $0 < r < R$.

e) Basta aplicar o Teorema 3 (derivação termo a termo) da Seção 7.4.

Exercícios 8.4

2. ***a***) Temos

$$\left|\sum_{n=p}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right| \leqslant \frac{1}{2p+1} \sum_{n=p}^{\infty} |x|\, x^{2n} = \frac{1}{2p+1} \cdot \frac{|x|^{2p+1}}{1-x^2}.$$

b) Para $|t| < 1$, $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{1-x^2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^{2n}\, dn = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$.

Por outro lado,

$$\int_0^t \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1+x}{1-x} \right]_0^t = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}$$

Portanto, para $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1+x}{1-x} \right].$$

Temos

$$\left| 2\sum_{n=p}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| = \left| 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - 2\sum_{n=0}^{p-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| =$$

$$= \left| \ln \frac{1+x}{1-x} - 2\sum_{n=0}^{p-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|.$$

Por (a), $\displaystyle\left| 2\sum_{n=p}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| \leqslant \frac{2}{2p+1} \frac{|x|^{2p+1}}{1-x^2}$.

Portanto,

$$\left| \ln \frac{1+x}{1-x} - 2\sum_{n=0}^{p-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| \leqslant \frac{2}{2p+1} \frac{|x|^{2p+1}}{1-x^2}.$$

5. Um processo é o descrito no Exemplo 7 da Seção 2.1 (série de Gregory). Outro processo é utilizando a integração termo a termo (Teorema 2 da Seção 8.3) que permite a integração termo a termo em todo intervalo $[a, b]$ contido no intervalo de convergência $]-R, R[$. Sabemos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \text{ para } -1 < x < 1.$$

Então, para $-1 < x < 1$, temos

$$\text{arc tg } x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k\, t^{2k}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

ou seja, para $-1 < x < 1$,

$$\text{arc tg } x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

O teorema da integração termo a termo somente nos garante a igualdade acima no intervalo aberto $-1 < x < 1$. Para concluir a validade no intervalo fechado $[-1, 1]$ a partir dessa igualdade, vamos precisar do seguinte teorema: se uma série de potências, em volta de zero, é convergente para $x = R$ ($x = -R$), sendo R o raio de convergência, então a soma $s(x)$ da série será contínua no intervalo fechado $[0, R]$ ($[-R, 0]$) (veja o Exercício 18).

Como $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ é convergente para $x = 1$ e $x = -1$ (verifique) segue que

$\displaystyle s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ é contínua em $[-1, 1]$. Como arc tg x é contínua em $[-1, 1]$, e

$\displaystyle \text{arc tg } x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ em $]-1, 1[$, resulta

$$\text{arc tg } x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ para } -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

10. *a*) Temos, para $x > 0$:

$\text{arc tg } x = y \iff \text{tg } y = x,\ 0 < y < \dfrac{\pi}{2};$

$\text{arc tg } \dfrac{1}{x} = z \iff \text{tg } z = \dfrac{1}{x} \iff \cot z = x, 0 < z < \dfrac{\pi}{2}.$

Logo, tg y = cot z. Daí, $\dfrac{\text{sen } y}{\cos y} = \dfrac{\cos z}{\text{sen } z}$, ou seja,
sen y sen z = cos y cos z.

Segue que

$\cos(y + z) = 0, 0 < y + z < \pi$.

Então, $(y + z) = \text{arc cos } 0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Portanto, para todo $x > 0$, temos

$$\underbrace{\text{arc tg } x}_{y} + \underbrace{\text{arc tg } \frac{1}{x}}_{z} = \frac{\pi}{2}.$$

Outro modo. $\dfrac{d}{dx}\left[\text{arc tg } x + \text{arc tg } \dfrac{1}{x}\right] = 0,$ para todo $x > 0$ (verifique), logo, existe uma constante k tal que arc tg x + arc tg $\dfrac{1}{x} = k$ para todo $x > 0$. Como para $x = 1$, $k = \dfrac{\pi}{2}$, resulta arc tg x + arc tg $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, para todo $x > 0$.

b) Com a série de Gregory, calcula-se arc tg $\dfrac{1}{3}$ com a precisão que desejar; em seguida, com a relação arc tg x + arc tg $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, calcula-se arc tg 3.

c) Procedimento análogo ao do item *b*.

12. ***a***) Seja a equação diferencial $y'' - y' - xy = 0$ que admite uma solução $y = y\,(x)$ desenvolvível em série de potências, em volta da origem, com raio de convergência $+\infty$, isto é, para todo x,

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

Temos:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny^{(n)}}{n!}(0)\, x^{n-1}$$

$$y'(x) = y'(0) + y''(0)\, x + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{ny^{(n)}(0)}{n!}\, x^{n-1} \text{ ou}$$

$$y'(x) = y'(0) + y''(0)\, x + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n-1)\, y^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\, x^{n-2}. \quad ①$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)\, y^{(n)}(0)}{n!}\, x^{n-2} \text{ ou}$$

$$y''(x) = y''(0) + y'''(0)\, x + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n(n-1)\, y^{(n)}(0)}{n!}\, x^{n-2}. \quad ②$$

$$xy(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!}\, x^{n+1}$$

$$xy(x) = x + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{y^{(n-3)}(0)}{(n-3)!}\, x^{n-2}. \quad ③$$

Substituindo ①, ② e ③ na equação $y'' - y' - xy = 0$ (estamos supondo que $y(x)$ é solução desta equação e reunindo os termos segundo as potências de x, obtemos:

$$y''(0) + y'''(0)\, x + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n(n-1)\, y^{(n)}(0)}{n!} x^{n-2} - y'(0) - y''(0)\, x -$$

$$- \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n-1)\, y^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\, x^{n-2} - x - \sum_{n=4}^{\infty} \frac{y^{(n-3)}(0)}{(n-3)!}\, x^{n-2} = 0$$

$$[y''(0) - y'(0)] + [y'''(0) - y''(0) - 1]\, x +$$

$$+ \sum_{n=4}^{\infty} \left[\frac{n(n-1)}{n!}\, y^{(n)}(0) - \frac{(n-1)}{(n-1)!} y^{(n-1)}(0) - \frac{y^{(n-3)}(0)}{(n-3)!} \right] x^{n-2} = 0$$

Como todos os coeficientes deverão ser nulos,

$y''(0) - y'(0) = 0 \Rightarrow y''(0) = y'(0) \Rightarrow y''(0) = 0$ (condição inicial $y'(0) = 0$)
$y'''(0) - y''(0) - 1 = 0 \Rightarrow y'''(0) = y''(0) + 1 \Rightarrow y'''(0) = 1$

$$\frac{y^{(n)}(0)}{(n-2)!} - \frac{y^{(n-1)}(0)}{(n-2)!} - \frac{y^{(n-3)}(0)}{(n-3)!} = 0, \;\; n \geqslant 4 \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y^{(n)}(0) - y^{(n-1)}(0) - (n-2)\, y^{(n-3)}(0) = 0, \;\; n \geqslant 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{(n)}(0) = y^{(n-1)}(0) + (n-2)\, y^{(n-3)}(0), \, n \geqslant 4.$$

***b*)** Do item a, para $n \geqslant 4$,

$$\frac{y^{(n)}(0)}{y^{(n-1)}(0)} = 1 + (n-2) \frac{y^{(n-3)}(0)}{y^{(n-1)}(0)}.$$

Pelo fato de a seqüência $y^{(n)}(0)$, $n \geqslant 4$, ser crescente (verifique), resulta

$\dfrac{y^{(n-3)}}{y^{(n-1)}} \leqslant 1, n \geqslant 4$. Então, para $n \geqslant 4, \dfrac{y^{(n)}(0)}{y^{(n-1)}(0)} \leqslant 1 + (n-2),$ ou seja,
$y^{(n)}(0) \leqslant (n-1)y^{(n-1)}(0), n \geqslant 4$.

c) Utilizando o item *b*,

$$\frac{y^{(n)}(0)}{n!} \leqslant \frac{(n-1)\, y^{(n-1)}(0)}{n!} \leqslant \frac{(n-1)(n-2)\, y^{(n-2)}(0)}{n!} \leqslant ... \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(n-1)(n-2)\, ...\, (n-(n-3))\, y'''(0)}{n!} = \frac{1}{2n}.$$

Logo, $\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2n}, n \geqslant 3$.

d) Para $|x| < 1$,

$$\left| y(x) - \left(1 + \sum_{n=3}^{p-1} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n \right) \right| = \left| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n - 1 - \sum_{n=3}^{p-1} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| =$$
$$= \left| \underbrace{y'(0)}_{0} x + \underbrace{y''(0)}_{0} \frac{x^2}{2!} + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| =$$
$$= \left| \sum_{n=p}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leqslant \sum_{n=p}^{\infty} \left| \frac{x^n}{2n} \right| = \frac{|x|^p}{2p} + \frac{|x|^{p+1}}{2p+2} + ... <$$
$$< \frac{1}{2p} \left(|x|^p + |x|^{p+1} + ... \right) = \frac{1}{2p} \frac{|x|^p}{(1-|x|)}.$$

Portanto,

$$\left| y(x) - \left(1 + \sum_{n=3}^{p-1} \frac{y^{(0)}(0)}{n!} x^n \right) \right| < \frac{|x|^p}{2p\,(1-|x|)}.$$

14. ***a***) Seja $y = (1+x)^{\alpha}, x > -1$. Então, $y' = \alpha\,(1+x)^{\alpha-1}$, onde α é um real dado não natural.

Substituindo $y(x)$ na equação diferencial linear de 1.ª ordem

$y' = \dfrac{\alpha}{(1+x)} \cdot y, x > -1$ ①, segue que

$$\alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x}(1+x)^{\alpha} \Rightarrow \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha(1+x)^{\alpha-1}.$$

Portanto, $y = (1+x)^{\alpha}, x > -1$ satisfaz ① e $y(0) = 1$.

b) Supondo $y = g(x)$, $|x| < 1$, solução de ①, segue que
$(1 + x)\, g'(x) = \alpha\, g(x)$.

Então,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{(1+x)^{\alpha}}\right] = \frac{(1+x)^{\alpha}\, g'(x) - g(x)\cdot \alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} =$$

$$= \frac{(1+x)^{\alpha-1}\,[(1+x)\, g'(x) - \alpha g(x)]}{(1+x)^{2\alpha}} = 0, |x| < 1$$

Portanto, existe uma constante k tal que

$\dfrac{g(x)}{(1+x)^{\alpha}} = k,$ isto é, $g(x) = k(1 + x)^{\alpha}$, $|x| < 1, k \in \mathbb{R}$.

Fazendo $x = 0$ e observando que $g(0) = 1$, temos $k = 1$.

Daí,

$$g(x) = (1 + x)^{\alpha}$$

c) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot\dfrac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}\right| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1.$

d) Seja $g(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n, |x| < 1.$

$$g(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + \ldots$$

Como a série é convergente para todo x tal que $|x| < 1$, é válida a derivação termo a termo em $]-1, 1[$. Temos,

$g'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\, x^{n-1}$, ou seja,

$g'(x) = \alpha + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!}\, x^n.$ Por outro lado,

$xg'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)n}{n!}\, x^n.$ Segue que

$$g'(x) + xg'(x) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n+n)}{n!} x^n. \text{ Daí}$$

$$(1+x)\,g'(x) = \alpha\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n\right] \text{ e, portanto,}$$

$(1 + x)\ g'(x) = \alpha g(x)$, $-1 < x < 1$. Então, $g(x)$ é solução de ①.

e) Temos

$g(x) = (1 + x)^{\alpha}$, $|x| < 1$ (pelo item *b*) e

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, |x| < 1 \text{ (pelo item } d\text{).}$$

Portanto, para todo $x \in\ ]-1, 1[$,

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

15. ***a***) Considerando $\alpha = -\frac{1}{2}$ no item *e* do Exercício 14,

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{(2n-1)}{2}\right)}{n!} x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^n$$

Portanto, para todo $x \in\ ]-1, 1[$,

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} x^n$$

b) Para $x = 1$ temos uma série numérica alternada.
Fazendo

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n},$$

temos $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1,\ n \geqslant 1$ assim a seqüência a_n é decrescente.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{2n+1}{2n+2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+2} = \dfrac{1}{2} > 0,$ pelo Exercício 7 *b* da Seção 3.5, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$ Logo, a série alternada é convergente. Então, para $x = 1$, a série de potências dada converge. (**Observação.** Como a série é convergente para $x = 1$ e tendo em vista o Exercício 18, segue que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} = \frac{\sqrt{2}}{2}.)$$

c) Para todo $x \in [0, 1]$ temos

$$\left| f(x) - \left[1 + \sum_{n=1}^{p-1} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} x^n\right]\right| =$$

$$= \left| \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} x^n \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=p}^{\infty} \left| (-1) \overbrace{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}}^{a_n} x^n \right| \leqslant \overbrace{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2p}}^{a_p},\ p \geqslant 2.$$

(Para $0 < x \leqslant 1$, a série é alternada e a seqüência a_n é decrescente, ou seja, $a_p \geqslant a_{p+1}$.)
Daí, para todo $x \in [0, 1]$:

$$\left| f(x) - \left[1 + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-1)^n\, 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} x^n\right]\right| \leqslant \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2p}$$

d) Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que, para $n \geqslant n_0,\ 0 < \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} < \varepsilon.$ Então, para todo $x \in [0, 1]$ e $n \geqslant n_0$,

$$\left| f(x) - \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k}\right]\right| < \varepsilon.$$

Logo, a série converge uniformemente em [0, 1]. Assim, neste intervalo, a soma da série é uma função contínua e, como $(1 + x)^{-1/2}$ é contínua neste intervalo, resulta

$$(1+x)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2k} x^k, \ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

(Veja, também, a solução do Exercício 18.)

e) Como a igualdade anterior se verifica, também, no intervalo $]-1, 0]$, segue que tal igualdade é válida para $-1 < x \leqslant 1$.

16. ***a***) Pelo Exercício 15 (item *a*)

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} x^n, \ -1 < x < 1.$$

Substituindo x por $(-x^2)$, segue que

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot x^{2n}, \ |x| < 1.$$

b) Utilizando o Teorema 2 da Seção 8.3 (integração termo a termo),

$$\text{arc sen } x = \int_0^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} x^{2n}\right] dx =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \int_0^x x^{2n}\, dx, \ |x| < 1.$$

Daí,

$$\text{arc sen } x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ |x| < 1.$$

a) Pelo critério de Raabe,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}\right) = \frac{3}{2} > 1.$$

Então, a série é convergente.

***b*)** Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Temos, para todo $x \in [-1, 1]$,

$$\left| \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \quad \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| \leqslant \underbrace{\left| \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \quad \frac{1}{2n+1} \right|}_{M_n}$$

A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente (item *a*).

Então, pelo critério *M* de Weierstrass, a série proposta é uniformemente convergente em $[-1, 1]$.

***c*)** Se $x = 1$, a série é convergente pelo critério de Raabe.

Se $x = -1$, a série fica $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$, logo, é convergente. A função $f(x) = \text{arc sen } x$ é contínua em 1 e em (-1). Logo, o desenvolvimento vale para $|x| \leqslant 1$. Portanto,

$$\text{arc sen } x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

***d*)** $\frac{\pi}{2} = \text{arc sen } 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$.

18. Temos $|a_n x^n| \leqslant |a_n R^n|$ para $|x| \leqslant R$. Como a série numérica $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k R^k|$ é convergente, pelo critério *M* de Weierstrass, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ será uniformemente convergente em $[-R, R]$, logo, a sua soma será contínua neste intervalo.

Vamos aproveitar e provar, também, que se a série for *condicionalmente convergente* em $x = R$, a série será uniformemente convergente em $[0, R]$ o que implicará a continuidade da soma em $]-R, R]$. Para a prova da convergência uniforme em $[0, R]$ vamos precisar da desigualdade de Abel: se d_n for uma seqüência decrescente e se existir um $B > 0$ tal que $\left| \sum_{k=0}^{n} b_k \right| \leqslant B$ para todo natural n, então, $\left| \sum_{k=0}^{n} b_k d_k \right| \leqslant B d_0$ para todo natural n.

Por hipótese, a série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, onde $b_k = a_k R^k$, é convergente. Então, pelo critério de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, para $n \geqslant n_0$ e para todo natural p, $\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon$.

Façamos, agora, $c_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n$, $0 \leqslant x \leqslant R$. Temos $0 \leqslant c_{n+1}(x) \leqslant c_n(x) \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant R$, ou seja, para cada x em $[0, R]$, a seqüência $c_n(x)$ é decrescente e limitada superiormente por 1. Observe, agora, que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k c_k(x)$. Então, para provar que a série é uniformemente convergente em $[0, R]$, basta mostrar, tendo em vista o critério de Cauchy para convergência uniforme, que, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, para $n \geqslant n_0$ e todo natural p, $\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k c_k(x)\right| \leqslant \varepsilon$, para todo x em $[0, R]$. Vamos, então, aplicar a desigualdade de Abel à soma $\sum_{k=n}^{n+p} b_k c_k(x)$, $0 \leqslant x \leqslant R$.

① $$\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k c_k(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{p} b_{k+n} c_{k+n}(x)\right| \leqslant B c_n(x) \leqslant B,\ 0 \leqslant x \leqslant R,$$

onde $\left|\sum_{k=0}^{p} b_{k+n}\right| \leqslant B$ para todo natural p. (Observe que na desigualdade acima $c_{k+n}(x)$ está substituindo o d_k e o d_0 foi substituído por $c_n(x)$.) Mas, como vimos anteriormente, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$\left|\sum_{k=0}^{p} b_{k+n}\right| = \left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k\right| \leqslant \varepsilon \text{ para } n \geqslant n_0 \text{ e para todo natural } p.$$

Trocando em ① B por ε, temos: para $n \geqslant n_0$ e para todo natural p,

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k c_k(x)\right| \leqslant \varepsilon,\ 0 \leqslant x \leqslant R,$$

e, portanto, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ é, pelo critério de Cauchy, uniformemente convergente em $[0, R]$. Com raciocínio análogo, prova-se que se a série for convergente para $x = -R$, então será uniformente convergente em $[-R, 0]$. **Conclusão.** Se a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ for convergente em $x = R$, tal série será uniformemente convergente $[0, R]$ e, portanto, contínua em $]-R, R]$. Se a série for convergente em $x = -R$, então será contínua em $[-R, R[$. Se a série for coanvergente em $x = R$ e em $x = -R$, então será contínua no intervalo fechado $[-R, R]$.

19. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} \right|$ é convergente se $\alpha > 0$ (Exercício 6 da Seção 3.5).

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} \right|$ é absolutamente convergente se $\alpha > 0$.
Portanto, pelo Exercício 18, a série anterior converge uniformemente em $[-1, 1]$ quando $\alpha > 0$. A sua soma é contínua neste intervalo.

Assim, para todo $x \in [-1, 1]$,

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

20. ***a***) Sendo $-1 < \alpha < 0$, com α não-natural, a série alternada de termo geral

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^n \underbrace{\left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} \right|}_{a_n}$$

é convergente, pois a_n é decrescente $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|\alpha - n|}{n+1} < 1 \right)$ e, pelo Exercício 9 *a* da Seção 3.5, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Logo, a série é convergente para $x = 1$. Raciocinando como no Exercício 15, conclui-se que a série é uniformemente convergente em $[0, 1]$. Para $x = -1$, temos a série de termo geral a_n que é divergente (veja Exercício 6 da Seção 3.5). Então, sendo α não-natural, $-1 < \alpha < 0$, temos

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n, -1 < x \leqslant 1.$$

b) Veja 9 *b* da Seção 3.5.

21. Suponhamos $|x| < 1$.

a) Temos:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, x^n$$

Como $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x}$ e $\displaystyle\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = -\frac{2}{(x-1)^3}$ resulta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

b) Temos

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)'' - 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)^{1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n.$$

Como $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)'' = -\frac{2}{(x-1)^3}$ (item *a*)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} \quad \text{e} \quad \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Resulta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = -\frac{2}{(x-1)^3} - \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{1-x} = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}.$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$