CAPÍTULO 9

Exercícios 9.1

1.

e. Seja $f(x)=\begin{cases}0, & \text{se } -\pi \leqslant x \leqslant -1\\ x+1, & \text{se } -1<x<0\\ 1, & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \pi\end{cases}$

Temos

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{0}(x+1)\,dx+\int_{0}^{\pi}dx=\frac{1+2\pi}{2\pi}\right.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{0}(x+1)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right]$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos n}{n^2}+\frac{\text{sen } n\pi}{n}\right]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos n}{n^2}\right)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen } nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{0}(x+1)\,\text{sen } nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\text{sen } nx\,dx\right]$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-n+\text{sen } n}{n^2}+\frac{1-\cos n\pi}{n}\right]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\text{sen } n-(n(-1)^n)}{n^2}\right)$$

A série de Fourier da função dada é:

$$\frac{1+2\pi}{4\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1-\cos n}{n^2}\right)\cos nx+\left(\frac{\text{sen } n-n(-1)^n}{n^2}\right)\text{sen } nx\right].$$

2. É só observar que sen nx e cos nx são periódicas de período 2π.

3. Seja $f(x)=e^{-x^2}$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Tal f é de classe C^2.

Como f é uma função par, a série de Fourier de f é $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, onde

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x^2}\cos nx\,dx,\ n\geqslant 0.$$

Integrando duas vezes por partes, com $n \geqslant 1$, obtemos:

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2}\left[(f'(\pi) - f'(-\pi))\cos n\pi - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,dx\right].$$

Seja $M_1 = |f'(\pi) - f'(-\pi)| + \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\,dx.$

Então,

$$|a_n| = \frac{1}{\pi n^2}\left|(f'(\pi) - f'(-\pi))\cos n\pi - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,dx\right| \leqslant \frac{M_1}{\pi n^2}.$$

Segue que para todo x real e para todo natural $n \geqslant 1$,

$$|a_n \cos nx| \leqslant |a_n| \leqslant \frac{M_1}{\pi n^2}.$$

Pelo critério M de Weierstrass, a série de Fourier de f converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

4. Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n^3}$.

a) Temos para todo x e todo $n \geqslant 1$,

$$\left|\frac{\text{sen } nx}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ é convergente.}$$

Segue, pelo critério M de Weierstrass, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n^3}$ converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$.

Pelo fato de a convergência ser uniforme e como cada $f_n(x) = \frac{\text{sen } nx}{n^3}$ é contínua, resulta que f é contínua (Teorema 1 da Seção 7.4).

b) Cada $f_n(x) = \frac{\text{sen } nx}{n^3}$, $n \geqslant 1$, é de classe C^1 em $\mathbb{R}$.

Além disso, temos:

$$\left(\frac{\text{sen } nx}{n^3}\right)' = \frac{\cos nx}{n^2}$$

Como $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, segue, pelo critério M de Weierstrass, que a série das derivadas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$. Portanto, é válida a derivação termo a termo (Teorema 3 da Seção 7.4). Assim,

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

5. Supondo $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ de classe C^3, $f(-\pi) = f(\pi)$ e $f'(-\pi) = f'(\pi)$.

Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$F(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx]$, onde a série do 2.º membro é a série de Fourier de f. Segue que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

Integrando por partes três vezes, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{n^3}\left[-(f''(\pi) - f''(-\pi)) \operatorname{sen} n\pi + \int_{-\pi}^{\pi} f'''(x) \operatorname{sen} nx \, dx\right]$$

Então,

$$|a_n| = \frac{1}{\pi n^3}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f'''(x) \operatorname{sen} nx \, dx\right| \leqslant \frac{M_1}{\pi n^3}, \text{ onde } M_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f'''(x)| \, dx.$$

Da mesma forma, existe $M_2 > 0$ tal que

$$|b_n| \leqslant \frac{M_2}{\pi n^3}.$$

Segue que $|nb_n \cos nx - na_n \operatorname{sen} nx| \leqslant |nb_n| + |na_n| \leqslant n|a_n| + n|b_n| \leqslant \dfrac{M}{n^2}$

onde $M = \dfrac{M_1 + M_2}{\pi}$.

Pelo critério M de Weierstrass, a série das derivadas $\sum_{n=1}^{\infty} [nb_n \cos nx - na_n \operatorname{sen} nx]$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

Além disso, as funções $a_n \cos nx$ e $b_n \operatorname{sen} nx$ são contínuas. Então, pelo Teorema 3 da Seção 7.4, é válida a derivação termo a termo, ou seja,

$$F'(x) = \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx] \right\}' = \sum_{n=1}^{\infty} [nb_n \cos nx - na_n \operatorname{sen} nx]$$

Exercícios 9.3

1. ***a***) Pelo Exemplo 3 da Seção 9.1, a série de Fourier da função $f(x) = x^2$, dada por

$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$, converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

Além disso, cada $f_n(x) = \cos nx$ é contínua.
Portanto, pelo Teorema 1 da Seção 7.4, resulta a continuidade de F.

2. Por hipótese, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, de classe C^2 por partes em $[-\pi, \pi]$ e periódica de período 2π. Pelo Teorema da Seção 9.3, para todo x em $[-\pi, \pi]$,

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx]$ onde os a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f. Como, por hipótese, f é periódica de período 2π e pelo fato de a série de Fourier ser, também, periódica de período 2π, segue que a igualdade anterior verifica-se para todo x real.

4. Não, pois se existisse uma série de Fourier que convergisse uniformemente a $f(x) = x$ em $[-\pi, \pi]$, deveríamos ter, conforme exercício anterior, $f(\pi) = f(-\pi)$, o que não acontece.

5. Basta tomar g contínua, de classe C^2 por partes em $[-\pi, \pi]$, tal que $g(\pi) = g(-\pi)$, e que coincida com f no intervalo $[a, \pi]$. Como a série de Fourier de g converge uniformemente a g em $[-\pi, \pi]$, segue que tal série convergirá, também, uniformemente a f em $[a, \pi]$. Observe que $g(x) = |x|, -\pi \leqslant x \leqslant \pi$, resolve o problema.

6. A série de Fourier da função g dada por $g(x) = \frac{|x|}{a}, -a \leqslant x \leqslant a$ e $g(x) = 1, -\pi \leqslant x \leqslant -a$ ou $a \leqslant x \leqslant \pi$, resolve o problema.

7. Seja $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função par, contínua e de classe C^2 por partes.

Como f é função par temos $f(-\pi) = f(\pi)$ e seus coeficientes de Fourier têm os valores:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{função par}} \cdot \underbrace{\cos nx}_{\text{função par}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

(O produto de duas funções pares é uma função par.)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{função par}} \cdot \underbrace{\operatorname{sen} nx}_{\text{função ímpar}}\,dx = 0$$

(O produto de uma função par por uma função ímpar dá uma função ímpar.)

Portanto, $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,dx.$

Como $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ é contínua, de classe C^2 por partes em $[-\pi, \pi]$ e tal que $f(-\pi) = f(\pi)$, segue, pelo Teorema da Seção 9.3, que para todo

$x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,dx$, sendo a convergência uniforme em $[-\pi, \pi]$.

Exercícios 9.4

1.

a) Seja $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\pi \leqslant x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 2, & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \text{se } \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

Como f é periódica de período 2π e de classe C^2 por partes em $[-\pi, \pi]$, podemos aplicar o Teorema da Seção 9.4.
Assim,

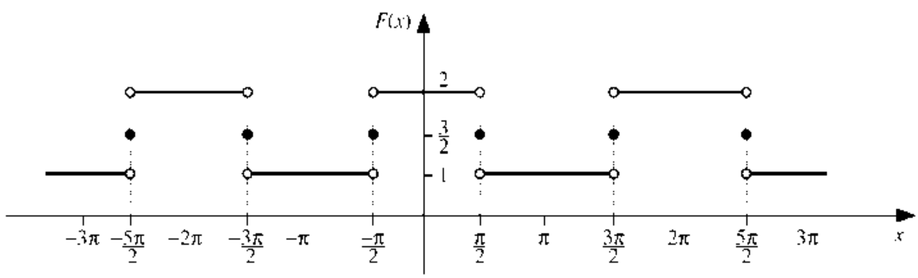
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f \text{ for contínua em } x \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & \text{se } f \text{ não for contínua em } x \end{cases}$$

A função f só é descontínua nos pontos da forma $(2n-1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Assim, em todo x em que f é descontínua,

$$F(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Segue que F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função periódica, de período 2π, dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\pi \leqslant x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3}{2}, & \text{se } x = -\dfrac{\pi}{2} \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{2} \\ 2, & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \text{se } \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \end{cases}$$



2. Seja $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\pi \leqslant x < 0 \\ 2, & \text{se } 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$

A função f é descontínua nos pontos $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.
Temos

$$F(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$F(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Segue que $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função periódica, de período 2π, dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\pi \leqslant x < 0 \\ \dfrac{3}{2}, & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ ou } x = -\pi \; (x = n\pi, n \in \mathbb{Z}) \\ 2, & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$