CAPÍTULO 10

Exercícios 10.2

2. *a*) Substituindo $x = \operatorname{tg} t$ e $\dfrac{dx}{dt} = \sec^2 t$ na equação $\dfrac{dx}{dt} = 1 + x^2$, obtemos $\sec^2 t = 1 + \operatorname{tg}^2 t$ para todo t no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, logo, $x = \operatorname{tg} t$ é solução da equação dada.

***c*)** Substituindo $x(t) = 4$ e $\dfrac{dx}{dt} = 0$ na equação $\dfrac{dx}{dt} = t(x^2 - 16)$, resulta $0 = 0$ para todo t, logo, a função constante $x(t) = 4$ é solução da equação dada.

***e*)** Sendo $y = e^{x^2/2}$ temos $\dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2/2}$ e daí $\dfrac{dy}{dx} = xy$, ou seja, $y = e^{x^2/2}$ é solução de $\dfrac{dy}{dx} = xy$.

Exercícios 10.3

1. *a*) A função constante $x(t) = 0$, t qualquer, é solução. Para $x \neq 0$, separando as variáveis, vem $\dfrac{dx}{x} = t\,dt$. Daí, $\ln|x| = \dfrac{t^2}{2} + k_1$, ou seja, $|x| = k_2 e^{t^2/2}$, onde $k_2 = e^{k_1} > 0$. Segue que $x = k_2 e^{t^2/2}$ ou $x = -k_2 e^{t^2/2}$. Então, $x = k_2 e^{t^2/2}$, k qualquer, é a família das soluções da equação dada. Observe que para $k = 0$ temos a solução constante $x(t) = 0$.

2. *b*) Queremos uma função $y = y(x)$ que seja solução da equação $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$ e que satisfaça a condição $y(1) = 2$. A função constante $y(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$, resolve o problema, pois é solução da equação e satisfaz a condição dada.

***d*)** As funções constantes $y(x) = 2$ e $y(x) = -2$ podem ser descartadas pois não satisfazem a condição dada $y(0) = 1$. Para $y \neq \pm 2$, separando as variáveis, obtemos $\dfrac{dy}{y^2 - 4} = dx$. Temos $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|$. Tendo em vista a condição $y(0) = 1$, podemos supor $0 < y < 2$. As soluções da equação satisfazendo esta condição são dadas implicitamente pelas equações $\dfrac{1}{4} \ln \dfrac{2-y}{y+2} = x + k$ que é equivalente a $\dfrac{2-y}{y+2} = e^{4x} e^{4k}$.

A condição $y(0) = 1$ será satisfeita para $e^{4k} = \frac{1}{3}$. A solução $y = \frac{6 - 2e^{4x}}{3 + e^{4x}}$ resolve o problema.

3. Separando as variáveis e integrando, obtemos $\lambda \ln V = -\ln p + k$ e daí segue $\ln(V^{\lambda} p) = k$. Tendo em vista a condição inicial, resulta $\ln(V_1^{\lambda} p_1) = k$. Então, $V^{\lambda} p = V_1^{\lambda} p_1$ para todo $p > 0$.

4. A equação que resolve o problema é $\frac{dy}{dx} = \alpha y^3$, sendo α o coeficiente de proporcionalidade. A família das soluções é $y = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha x - 2k}}$ ou $y = 0$. Levando em conta as condições $y(0) = 1$ e $y(1) = 1$, resulta $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

5. Seja $x = x(t)$ a distância, no instante t, do corpo ao ponto de onde foi abandonado. Então, a queda do corpo é regida pela equação $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \alpha v$, ou seja, $10\frac{dv}{dt} = 10g - \alpha v$ e sabe-se que $v(0) = 0$ e $v(1) = 8$. (*Lembre-se*: $v = \frac{dx}{dt}$.) Tem-se então $v = \frac{100}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{10}}\right)$ onde α é a raiz da equação $\alpha = \frac{25}{2}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{10}}\right)$.

8. Sendo $x = x(t)$ onde x é a distância no instante t do corpo ao ponto de repouso, pela 2.ª lei de Newton, temos $2,5\frac{d^2x}{dt^2} = 2,5\,g - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, onde g é a aceleração gravitacional. Segue que $2,5\frac{dv}{dt} = 25 - (v)^2$. Separando as variáveis, obtemos $\frac{2,5dv}{25 - v^2} = dt$. Resolvendo e levando em conta que $v = 0$ para $t = 0$, resulta $v = \frac{5(e^{4t+1} - 1)}{e^{4t+1} + 1}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, onde T é o instante em que o corpo toca a terra.

Exercícios 10.4

5. ***a)*** A equação que rege a variação do capital investido é $\frac{dC}{dt} = 0,08C$. Tendo em vista a condição inicial $C(0) = C_0$, resulta $C(t) = C_0 e^{0,08t}$.

b) Ao final de 1 mês teremos $C(1) = C_0 e^{0,08} \cong 1,083287C_0$, ou seja,

$C(1) = C_0 + \underbrace{0{,}0832887C_0}_{ganho}$; logo, em 1 mês o ganho foi de 8,3287% de C_0. Assim, o rendimento mensal (sem contar impostos) foi de 8,3287% ao mês.

8. A equação que rege o movimento é $\dfrac{dv}{dt} = \alpha v$, onde α é a constante de proporcionalidade e $v = \dfrac{dx}{dt}$. Resolvendo, obtém-se $x(t) = \dfrac{3}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)$, onde $\alpha = \ln\dfrac{2}{3}$.

9. Seja $y = f(x)$, $x > 0$, a função procurada. A equação da reta tangente no ponto genérico $(p, f(p))$ é $y - f(p) = f'(p)(x - p)$. Para que a reta tangente encontre o eixo y no ponto $(0, m)$, deveremos ter, $m = f(p) - pf'(p)$; como, a área do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, m)$ e $(p, f(p))$ é $\dfrac{mp}{2}$, segue que a função procurada é solução da equação $\dfrac{pf(p) - p^2 f'(p)}{2} = 1$ que é equivalente a $f'(p) = \dfrac{f(p)}{p} - \dfrac{2}{p^2}$, ou seja, a função procurada $y = f(x)$, $x > 0$, deverá ser solução da equação linear $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}y - \dfrac{2}{x^2}$, $x > 0$. Resolvendo e levando em conta a condição $y = 2$ para $x = 1$, obtém-se $y = x + \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

Exercícios 10.5

1. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = 5y - \dfrac{4x}{y}$, $y \neq 0$, é equivalente a $y\dfrac{dy}{dx} = 5y^2 - 4x$. Com a mudança de variável $u = y^2$ e, portanto, $\dfrac{du}{dx} = 2y\dfrac{dy}{dx}$, obtemos $\dfrac{du}{dx} = 10u - 8x$ que é uma equação linear cuja solução é $u = e^{10x}\left[k + \int -8xe^{-10x}\,dx\right]$. De $\int -8xe^{-10x}dx = \dfrac{8}{10}xe^{-10x} + \dfrac{8}{100}e^{-10x}$ resulta $u = ke^{10x} + \dfrac{20x + 2}{25}$. As soluções $y = y(x)$ são, então, dadas implicitamente pelas equações $y^2 = ke^{10x} + \dfrac{20x + 2}{25}$.

***d*)** A equação $\dfrac{dy}{dx} = y - y^3$ é uma equação de variáveis separáveis e, também, de Bernoulli. É mais rápido resolvê-la olhando-a como de Bernoulli. A função constante $y(x) = 0$, x qualquer, é solução. Para $y \neq 0$, é equivalente a $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = y^{-2} - 1$. Fazendo $u = y^{-2}$, $\dfrac{du}{dx} = -2y^{-3}\dfrac{dy}{dx}$. Substituindo na equação, vem $\dfrac{du}{dx} = -2u + 2$ e daí,

$u = e^{-2x}\left[k + \int 2e^{2x}\, dx\right]$, ou seja, $u = ke^{-2x} + 1$. Então, a solução da equação dada é $y(x) = 0$ ou $y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{ke^{-2x} + 1}}$. (*Sugestão*: Resolva-a separando as variáveis.)

2. ***a*)** A solução da equação é $p(t) = p_0 e^{\lambda t}$, $t \geqslant 0$. Se $\alpha = \beta$, teremos $\lambda = 0$ e, então, $p(t) = p_0$ para $t \geqslant 0$, ou seja, a população se manterá constante e igual a p_0.

***b*)** A população no instante t é $p(t) = p_0 e^{\lambda t}$, $t \geqslant 0$. Se $\alpha > \beta$, $\lambda > 0$ e então a população estará crescendo exponencialmente. Se $\alpha < \beta$, $\lambda < 0$ e, então, $\lim\limits_{t \to \infty} p(t) = 0$, ou seja, a população tenderá à extinção.

3. ***a*)** A equação $\dfrac{dp}{dt} = \lambda p - \varepsilon p^2$ é uma equação de Bernoulli e, também, de variáveis separáveis. Resolvendo-a obtemos $p = \dfrac{\lambda}{\lambda k e^{-\lambda t} + \varepsilon}$. Tendo em vista a condição $p(0) = p_0$ e $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{\gamma}$, resulta $p = \dfrac{\lambda p_0}{(\gamma - p_0)e^{-\lambda t} + p_0}$, $t \geqslant 0$. Observe que para t tendendo a ∞, p tende a γ.

***b*)** Como $\dfrac{dp}{dt} = \lambda p - \varepsilon p^2$, o valor máximo de $\dfrac{dp}{dt}$ ocorrerá no instante em que p for o vértice da parábola $z = \lambda p - \varepsilon p^2$, ou seja, no instante em que $p = \dfrac{\lambda}{2\varepsilon} = \dfrac{\gamma}{2}$. No instante $t = t_1$ em que $\dfrac{dp}{dt}$ é máximo deveremos ter $\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\gamma p_0}{(\gamma - p_0)e^{-\lambda t_1} + p_0}$, ou seja, $t_1 = -\dfrac{1}{\lambda} \ln \dfrac{p_0}{\gamma - p_0}$. Observe que no instante $t = t_1$ em que $\dfrac{dp}{dt}$ é máximo, estará ocorrendo um ponto de inflexão no gráfico de $p = p(t)$. Se $p_0 < \dfrac{\gamma}{2}$, no intervalo $]0, t_1[$, o gráfico de $p = p(t)$ terá a concavidade para cima, ou seja, neste intervalo, a população estará crescendo a taxas crescentes e, no intervalo $]t_1, \infty[$, o gráfico terá a concavidade para baixo, ou seja, a população estará crescendo a taxas decrescentes.

4. A solução $p = p(t)$ é dada implicitamente pela equação $p^{1-\alpha} = ke^{(1-\alpha)\lambda t} + \gamma^{1-\alpha}$, onde $k = p_0^{1-\alpha} - \gamma^{1-\alpha}$.

5. $p(t) = \left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{3}}\right)^3$.

Exercícios 10.6

1. ***a***) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y}{x}$, $x \neq 0$ é equivalente a $\dfrac{dy}{dx} = 1 + 2\,\dfrac{y}{x}$. Fazendo $u = \dfrac{y}{x}$ teremos $y = xu$ e daí $\dfrac{dy}{dx} = u + x\,\dfrac{du}{dx}$. Substituindo na equação obtemos a equação de variáveis separáveis $x\,\dfrac{du}{dx} = 1 + u$. A função constante $u = -1$, $x > 0$ (ou $x < 0$) é solução. Supondo $1 + u \neq 0$, separando as variáveis e integrando, obtemos $\ln|1+u| = \ln k_1|x|, k_1 > 0$, e daí $1 + u = kx$, k real e diferente de zero. Permitindo que k assuma, também, o valor zero, teremos a solução $u = kx - 1$. Observe que para $k = 0$, teremos a solução constante $u = -1$. Segue que $y = kx^2 - x$, $x > 0$ (ou $x < 0$) é a solução geral da equação dada. Observe que poderíamos, também, ter resolvido a equação dada, olhando-a como uma equação linear.

b) $y = 0$, $x > 0$ (ou $x < 0$) ou $y = \dfrac{3x}{1 - kx^3}$.

c) Com a mudança de variável $u = \dfrac{y}{x}$, ou seja, $y = xu$, a equação $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{y}$ é equivalente a $\dfrac{u}{u^2 + u - 2}\,du = -\dfrac{1}{x}\,dx$. Integrando, obtemos $(u-1)(u+2)^2 = \dfrac{k}{x^3}$, k real. As soluções $y = y(x)$ são dadas, então, implicitamente pelas equações $(y - x)(y + 2x)^2 = k$, k real.

d) $y(x) = 0$, $x > 0$ (ou $x < 0$) e as soluções não constantes $y = y(x)$ (ou $x = x(y)$) são dadas implicitamente pelas equações $y + x\ln|y| = kx$.

2. $y(x) = 0$, $x > 0$ (ou $x < 0$) ou $y = \dfrac{x}{ke^{-x} + 1}$.

Exercícios 10.7

1. ***a***) De $v = \dfrac{dx}{dt}$ segue $\ddot{x} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}$, ou seja, $\ddot{x} = v\,\dfrac{dv}{dx}$. Substituindo na equação obtemos $v\,\dfrac{dv}{dx} = -x^3$. Separando as variáveis e integrando, resulta $\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} = k$.

b) Com as mudanças $v = \dfrac{dx}{dt}$ e $\ddot{x} = v\dfrac{dv}{dx}$ a equação dada se transforma na equação de variáveis separáveis $\dfrac{v\,dv}{v-1} = x^3 dx.$ Integrando, obtemos a relação entre v e x que é

$v + \ln|\,v - 1\,| - \dfrac{x^4}{4} = k.$

c) $\alpha v - \ln|\,\alpha v + 1\,| + \dfrac{x^2}{2} = k$

d) $\dfrac{v^2}{2} + 2x^2 = k$

e) Com a mudança de variáveis $v = \dfrac{dx}{dt}$ e $\ddot{x} = v\dfrac{dv}{dx}$ a equação se transforma na equação de Bernoulli $\dfrac{dv}{dx} = v - xv^{-1}$ que é equivalente a $2v\dfrac{dv}{dx} = 2v^2 - 2x.$ Com a mudança $u = v^2,$ obtemos a equação linear $\dfrac{du}{dx} = 2u - 2x$ cuja solução é

$u = e^{2x}\left[k - \int 2xe^{-2x}dx\right].$ De $\int 2xe^{-2x}dx = xe^{-2x} + \dfrac{e^{-2x}}{2}$ resulta

$v^2 = ke^{2x} + x + \dfrac{1}{2}.$

f) $v^2 = ke^{x^2} + 1$

2. Fazendo $\ddot{x} = v\dfrac{dv}{dx},$ obtemos $v\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{gR^2}{(x+R)^2};$ separando as variáveis e integrando obtemos $\dfrac{v^2}{2} = \dfrac{gR^2}{x+R} + k.$ Tendo em vista a condição inicial $v = \alpha$ e $x = 0$ para $t = 0,$ teremos $k = \dfrac{\alpha^2}{2} - gR.$ Assim, $\dfrac{v^2}{2} = \dfrac{gR^2}{x+R} + \dfrac{\alpha^2}{2} - gR.$ Para que o corpo retorne à terra, para algum x deveremos ter $v = 0$; deste modo, a condição para que retorne à terra é $0 = \dfrac{gR^2}{x+R} + \dfrac{\alpha^2}{2} - gR,$ ou seja, $x = \dfrac{R\alpha^2}{2gR - \alpha^2}.$ Para que retorne à terra, e lembrando que $x > 0$, deveremos ter $\alpha^2 < 2gR$. Então, o menor valor para que não retorne à terra é $\alpha = \sqrt{2gR}.$

Exercícios 10.8

1. ***d***) Seja a equação $(2x+3y)dx+(3x+2y)dy=0.$ Para todo $(x,\ y)$ em $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y)=\frac{\partial}{\partial x}(3x+2y)=3,$ logo, a equação é exata. Integrando o coeficiente de dx em relação a x, obtemos $x^2+3xy+k,$ onde k depende de y. Para que a derivada em relação a y desta expressão dê $3x+2y,$ basta tomar $k=y^2.$ As soluções da equação são, então, dadas implicitamente pelas equações $x^2+3xy+y^2=c,$ com c constante.

2. ***b***) $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y}{x-3y^2}$ com a condição inicial $y(1)=0.$ Para $x-3y^2\neq 0,$ a equação é equivalente a $(3x^2-y)dx+(3y^2-x)dy=0$ que é uma equação exata, pois, $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2-y)=\frac{\partial}{\partial x}(3y^2-x)=-1.$ Integrando, obtemos $x^3-xy+y^3=c.$ Para que a condição $y(1)=0$ seja satisfeita, devemos tomar $c=1$ que foi obtido fazendo $x=1$ e $y=0$ na equação anterior. A solução $y=y(x)$ é, então, dada implicitamente pela equação $x^3-xy+y^3=1.$

3. ***c***) Para que a curva $y(t)=(x,\ y)$ seja ortogonal ao campo $\vec{F}$ no ponto $(x,\ y)$ deveremos ter $\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$ ortogonal a $\vec{F}(x,\ y)$, ou seja, $\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)\cdot\vec{F}(x,\ y)=0$ e, portanto, $y\frac{dx}{dt}+(x+y^2)\frac{dy}{dt}=0,$ pois, $\vec{F}(x,\ y)=y\,\vec{i}+(x+y^2)\,\vec{j}$. Assim, a curva deverá ser solução da equação $y\,dx+(x+y^2)\,dy=0$ e passar pelo ponto (1, 2) dado. Como se trata de uma equação exata, integrando e levando em conta a condição dada obtemos a curva $xy+\frac{y^3}{3}=\frac{14}{3}$, ou seja, $3xy+y^3=14$ que é ortogonal ao campo dado e que passa pelo ponto (1, 2). Por exemplo, fazendo $y=t$, teremos a curva $\gamma(t)=\left(\frac{14-t^3}{3t},\ t\right)$, $t>0$, que resolve o problema.

4. A equação que rege o movimento é $(x-t)\frac{dx}{dt}=x+t$ e sabe-se que $x(0)=1$. A equação é equivalente a $(x+t)\,dt+(t-x)\,dx=0$ que é uma equação exata, pois, $\frac{\partial}{\partial x}(x+t)=\frac{\partial}{\partial t}(t-x).$ Integrando, obtemos $\frac{t^2}{2}+xt-\frac{x^2}{2}=c.$ Para que a condição

$x = 1$ para $t = 0$ se verifique, basta tomar $c = -\dfrac{1}{2}$. Deste modo, a posição $x = x(t)$ é dada implicitamente pela equação $t^2 + 2xt - x^2 = -1$, ou seja, $x^2 - 2xt - t^2 - 1 = 0$ e, portanto, $x = \dfrac{2t + \sqrt{4t^2 + 4t^2 + 4}}{2}$. Então, a posição no instante t é dada por

$x = t + \sqrt{2t^2 + 1}$, t em $\mathbb{R}$.

6. Sendo $x = x(t)$ e $y = y(t)$, com t num intervalo I contendo 0, a posição da partícula no instante t, então para todo t em I temos $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$. Multiplicando a primeira equação por x, a segunda por $2y$ e somando membro, obtemos, para todo t em I, $x\dfrac{dx}{dt} + 2y\dfrac{dy}{dt} = 0$, ou seja, $x = x(t)$ e $y = y(t)$, t em I, é solução da equação $x\,dx + 2y\,dy = 0$ cuja solução é $x^2 + 2y^2 = c$. Tendo em vista as condições $x = 1$ e $y = 1$ para $t = 0$, resulta $x^2 + 2y^2 = 3$. Logo, a partícula desloca-se sobre a elipse $x^2 + 2y^2 = 3$.

Exercícios 10.9

1. ***e***) $\underbrace{(2x + 3y)}_{P}\,dx + \underbrace{x}_{Q}\,dy = 0$. Temos $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2$. De $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{Q} = -\dfrac{2}{x}$ segue que $e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$ é um fator integrante. Para $x \neq 0$, a equação dada é equivalente a $(2x^3 + 3x^2y)\,dx + x^3\,dy = 0$. Integrando, obtemos $\dfrac{x^4}{2} + x^3y = c$, ou seja,

$y = \dfrac{2c - x^4}{2x^3}$, $x \neq 0$.

f) $\underbrace{(3xy - 4y)}_{P}\,dx + \underbrace{(2x^2 - 4x)}_{Q}\,dy = 0$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = x$. Aqui o melhor a fazer é utilizar o Exemplo 2. Como $xP - yQ = x^2y$, segue que $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{xP - yQ} = \dfrac{1}{t}$, onde $t = xy$, $x > 0$ e $y > 0$.

Pelo Exemplo 2, $u(x,\ y) = e^{\int \frac{1}{t} dt} = t = xy$ é um fator integrante. Para $x > 0$ e $y > 0$, a equação dada é equivalente a

$\left(3x^2y^2 - 4xy^2\right) dx + \left(2x^3y - 4x^2y\right) dy = 0$ que é uma equação exata. Integrando, obtemos $x^3y^2 - 2x^2y^2 = c$. Observamos que outro fator integrante para a equação é

$e^{-\int h(x)dx}$ onde $h(x) = \dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{Q} = \dfrac{1}{2(x-4)}$, $x > 0$ e $x \neq 4$.

7. *b*) A equação dada é equivalente a $(2x + 3y)\, dx + (3x - y)\, dy = 0,\ \ y \neq 3x$, que é uma equação exata. Integrando, obtemos $x^2 + 3xy - \dfrac{y^2}{2} = c$, ou seja,

$2x^2 + 6xy - y^2 = k.\ \ (k = 2c)$

***d*)** Trata-se de uma equação linear cuja solução geral é

$$y = e^{\frac{x^3}{3}}\left[k + \int 2e^{-\frac{x^3}{3}}\, dx\right].$$

***e*)** É uma equação linear cuja solução geral é $y = e^x\left[\ k + \int \text{ sen } x\, e^{-x} dx\ \right]$.

***f*)** É uma equação de variáveis separáveis. Separando as variáveis e integrando, obtemos

$\dfrac{y^3}{3} + y = \dfrac{x^2}{2} + x + c.$

***g*)** A equação é equivalente à linear $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x}{x^2+1}y + \dfrac{2}{x^2+1}$, cuja solução geral é

$y = e^{\int \frac{3x}{x^2+1}dx}\left[k + \int \dfrac{2}{x^2+1} e^{-\int \frac{3x}{x^2+1}dx}\, dx\right]$, ou seja,

$y = \left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\left[k + \int \dfrac{2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}\, dx\right]$. Para calcular a integral, basta fazer a mudança de variável $x = \text{tg } u$, $\ -\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$.

h) É uma equação linear, cuja solução geral é $y = e^{5x}\left[\, k + \int x^2 e^{-5x} dx \,\right]$.

i) A equação é equivalente a $\left(x^2 + 2y + 1\right) dx + \left(2x - 3y + 1\right) dy = 0$ que é uma equação exata. Integrando, obtemos $2x^3 + 12xy + 6x - 9y^2 + 6y = c$.

j) A equação é equivalente a $\dfrac{dy}{dx} = -xy + xy^3$ que é uma equação de Bernoulli e, também, de variáveis separáveis. É preferível resolvê-la olhando-a como de Bernoulli. Resolvendo, obtém-se $y^{-2} = e^{x^2}\left[k + \int -2xe^{-x^2} dx\right]$, ou seja,

$y^{-2} = ke^{x^2} + 1$. Observe que a função constante $y = 0$ também é solução.

8. Seja $u = u(t)$, $t = x^2 + y^2$. Temos $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u'(t) \cdot 2x$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = u'(t) \cdot 2y$. Substituindo em ② da Seção 10.9, vem $u'(t) = u(t)\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{2yP - 2xQ}$. Se

$\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{2yP - 2xQ} = g(t)$, $t = x^2 + y^2$, então a equação admitirá o fator integrante

$u(x, y) = e^{\int g(t)dt}$, $t = x^2 + y^2$. Observe que $e^{\int g(t)dt}$ é uma solução da equação linear $u' = g(t)u$.

9. Consideremos a equação $(x + y)\, dx + (y - x)\, dy = 0$. Temos

$\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{2yP - 2xQ} = -\dfrac{1}{t}$, $t = x^2 + y^2$. Assim, $u(x, y) = e^{-\int \frac{1}{t} dt} = \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ é um fator integrante. Para $(x, y) \neq (0, 0)$, a equação é equivalente a

$\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$. Integrando, obtemos

$\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + \text{arc tg}\,\dfrac{x}{y} = c$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

2. $\int_0^t \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_0^t y\,dx$. Supondo que a função admita derivada contínua no intervalo *I*, com $0 \in I$, pelo teorema fundamental do cálculo, $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y$ e, portanto, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 1}$. Separando as variáveis, vem $\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = dx$. Fazendo $y = \sec u$, $0 \leqslant u < \frac{\pi}{2}$, $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{\sec u \operatorname{tg} u\, du}{\operatorname{tg} u}$ e, portanto, $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \ln(\sec u + \operatorname{tg} u) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$. Então, a solução do problema é dada implicitamente pela equação $\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right) = x + k$. Tendo em vista a condição $y = \frac{5}{4}$ para $x = 0$, teremos $k = \ln 2$. Segue que $y + \sqrt{y^2-1} = 2e^x$, ou seja, $y^2 - 1 = 4e^{2x} - 4ye^x + y^2$ e, portanto, $y = \frac{e^{-x} + 4e^x}{4}$, $x \geqslant 0$.

8. Seja $y = f(x)$ a função procurada. Tendo em vista a condição $f(1) = 1$, podemos supor $y > 0$ e *x* num intervalo aberto *I*, com 1 em *I*. Vamos supor, também, que a função seja decrescente. A equação da reta tangente no ponto $(p, f(p))$ é $y - f(p) = f'(p)(x-p)$. Esta reta encontra o eixo *x* no ponto de abscissa $M = p - \frac{f(p)}{f'(p)}$. A área do triângulo de vértices $(p, 0)$, $(p, f(p))$ e $(M, 0)$ é $\frac{1}{2}(M-p)f(p)$. Temos, então, $(M-p)f(p) = 2p$, ou seja, $-\left[f(p)\right]^2 = 2pf'(p)$.

Deste modo, a função procurada deverá ser solução da equação $2x\frac{dy}{dx} = -y^2$.

Separando as variáveis e integrando, vem $\frac{1}{y} = \ln k\sqrt{x}$. Da condição $y = 1$ para $x = 1$, obtemos $k = e$. Temos, então, $y = \frac{1}{1 + \ln\sqrt{x}}$, $x > e^{-2}$. Se supuséssemos a função crescente, teríamos a equação $2x\frac{dy}{dx} = y^2$, e a função procurada seria $y = \frac{1}{1 - \ln\sqrt{x}}$, $0 < x < e^2$.

13. $2\pi\int_0^t y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi t$, $t \geqslant 0$ com $t \in I$. Supondo que a função procurada seja crescente e tenha a derivada contínua, pelo teorema fundamental do cálculo, vem $y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 1$ e, portanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$. Separando as variáveis integrando e levando em consideração a condição $y = \frac{4}{5}$ para $x = 0$, obtemos $y = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}-x\right)^2}$, $0 \leqslant x < \frac{3}{5}$. (*Sugestão*: Resolva o problema supondo a função decrescente.)

15. ***c***) $\operatorname{grad}\left(x^2y - x^2\right) = \left(2xy - 2x,\ x^2\right)$, $x > 0$. As curvas que queremos são, então, ortogonais ao campo $\vec{F}(x,\ y) = x^2\,\vec{i} + (2x - 2xy)\,\vec{j}$. As curvas ortogonais a este campo são as soluções da equação $x\,dx + (2 - 2y)\,dy = 0$. Integrando, obtemos $x^2 + 4y - 2y^2 = c$, $x > 0$, que é a família de curvas ortogonal à família dada.

d) $\operatorname{grad}\left(x^2 + 2xy - y^2\right) = (2x + 2y,\ 2x - 2y)$. As curvas que queremos são, então, ortogonais ao campo $\vec{F}(x,\ y) = (y - x)\,\vec{i} + (x + y)\,\vec{j}$. As curvas ortogonais a este campo são as soluções de $(y - x)\,dx + (x + y)\,dy = 0$ que é uma equação exata. Assim, $y^2 + 2xy - x^2 = c$ é a família de curvas ortogonais às curvas da família dada.