Capítulo 11

Exercícios 11.1

5. A solução geral da equação é $y = e^{-x}\left[k + \int (2x + x^2)\, e^x\, dx\right]$ e, portanto,

$y = ke^{-x} + x^2$, pois, $\int (2x + x^2)\, e^x\, dx = x^2 e^x$.

a) Para que a condição $y(0) = 0$ seja verificada, basta tomar $k = 0$. O gráfico pedido é então a parábola $y = x^2$.

b) É o gráfico da solução $y = e^{-x} + x^2$.

Exercícios 11.2

10. A equação que rege o movimento é $\ddot{x} = -x - c\dot{x}$, ou seja, $\ddot{x} + c\dot{x} + x = 0,\ c > 0$. As raízes da equação característica são dadas por $\lambda = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}$. Para $c = 2$, a equação característica admitirá a única raiz real $\lambda = -\dfrac{c}{2}$ e a solução geral será $x = e^{-\frac{c}{2}t}\,(A + Bt)$. Considerando as condições iniciais $x(0) = x_0$, $x_0 > 0$, e $\dot{x}(0) = 0$, deveremos ter $A = x_0$ e $B = \dfrac{cx_0}{2}$; a solução satisfazendo tais condições será, então, $x = x_0 e^{-\frac{c}{2}t}\left(1 + \dfrac{c}{2}t\right)$; segue que $x(t) > 0$ para todo $t \geqslant 0$ e $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$, ou seja, se no instante $t = 0$ a partícula é abandonada na posição $x_0 > 0$ e com velocidade nula, então a partícula será atraída para a origem, mas sem oscilar em torno da origem. Se o fator de amortecimento c for estritamente maior que 2, a partícula tenderá, também, para a origem, pois as raízes características serão ambas negativas, só que mais lentamente que no caso $c = 2$. No caso $0 < c < 2$, a partícula tenderá para a origem com movimento oscilatório em torno da origem. Temos então

a) para $c > 2$ o movimento será fortemente amortecido;
b) para $c = 2$ teremos o amortecimento crítico;
c) para $0 < c < 2$ teremos o movimento oscilatório amortecido.

Exercícios 11.3

4. ***a***) A equação que rege o movimento da partícula é $(\ddot{x}, \ddot{y}) = \vec{F}(x, y)$, ou seja, $(\ddot{x}, \ddot{y}) = -\nabla U(x, y)$. Seja $x = x(t)$ e $y = y(t)$ uma solução satisfazendo as condições iniciais $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$. Multiplicando ambos os membros da equação escalarmente por $(\dot{x}, \dot{y})$, obtemos $\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \nabla U(x, y) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = 0$. Pela regra da cadeia para uma e duas variáveis, temos

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2}\right) \quad \text{e} \quad \nabla U(x, y) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = \frac{d}{dt} U(x, y).$$

Então, para todo $t \geqslant 0$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + U(x, y)\right) = 0.$$

Existe então uma constante k tal que

$\dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{\dot{y}^2}{2} + U(x, y) = k$, para todo $t \geqslant 0$.

De $U(x, y) = x^2 + xy + y^2$ e tendo em vista as condições $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$, resulta $k = 3$. Deste modo, para todo $t \geqslant 0$ teremos

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + x^2 + xy + y^2 = 3.$$

Como, para todo $t \geqslant 0$, $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{\dot{y}^2}{2} \geqslant 0$, a partícula permanecerá na região $x^2 + xy + y^2 \leqslant 3$, que é uma região elíptica.

b) A equação que rege o movimento é $(\ddot{x}, \ddot{y}) = -\nabla U(x, y)$, ou seja, $(\ddot{x}, \ddot{y}) = -(2x + y, x + 2y)$, pois $\nabla U(x, y) = (2x + y, x + 2y)$. Temos então o sistema

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2x - y \\ \ddot{y} = -x - 2y \end{cases}$$

Derivando a 2.ª equação duas vezes em relação a t obtemos

$$\frac{d^4 y}{dt^4} = -\ddot{x} - 2\ddot{y}.$$

Multiplicando a 2.ª equação do sistema por -2 e somando com a primeira, obtemos $\ddot{x} = 2\ddot{y} + 3y$. Substituindo este $\ddot{x}$ na equação anterior, resulta

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 4\frac{d^2 y}{dt^2} + 3y = 0.$$

A equação característica $\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = 0$ é uma equação biquadrada com raízes $\pm i\sqrt{3}$ e $\pm i$. A solução geral desta equação é então $y = A\cos t + B\text{sen } t + C\cos \sqrt{3}\, t + D\text{sen } \sqrt{3}\, t$. Da equação $\ddot{y} = -x - 2y$ segue $\dddot{y} = -\dot{x} - 2\dot{y}$ e, tendo em vista as condições iniciais, resulta $\ddot{y}(0) = -3$ e $\dddot{y}(0) = 0$. Então, as constantes *A, B, C* e *D* devem ser determinadas de modo que as condições iniciais $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) = -3$ e $\dddot{y}(0) = 0$ sejam satisfeitas. Deveremos ter então

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B + D\sqrt{3} = 0 \\ -A - 3C = -3 \\ -B - 3\sqrt{3}D = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$ e $D = 0$. Assim, $y = \cos\sqrt{3}t$, $t \geqslant 1$. Substituindo este valor de y na equação $\ddot{y} = -x - 2y$, obtemos $x = \cos\sqrt{3}t$. Assim, a posição da partícula no instante $t \geqslant 0$ é dada por $x = \cos\sqrt{3}t$ e $y = \cos\sqrt{3}t$.

Exercícios 11.4

2. Sendo $x_1 = g_1(t)$ e $x_2 = g_2(t)$ soluções particulares de $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f_1(t)$ e de $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f_2(t)$, respectivamente, então teremos $\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + cx_1 = f_1(t)$ e $\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + cx_2 = f_2(t)$ e daí, somando membro a membro estas duas equações, obteremos $(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + b(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + c(x_1 + x_2) = f_1(t) + f_2(t)$, ou seja, $g_1(t) + g_2(t)$ é uma solução particular de $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f_1(t) + f_2(t)$.

5. Para $t < \pi$, $\ddot{x} + x = 0$, daí $x = A\cos t + B\text{sen } t$. Para que as condições $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$ sejam satisfeitas devemos ter $A = 0$ e $B = 1$. Assim, para $t < \pi$, $x = \text{sen } t$. Para $\pi < t < 2\pi$, $\ddot{x} + x = 1$, logo, $x = C\cos t + D\text{sen } t + 1$. Para garantir a continuidade de $x = x(t)$ e de $\dot{x} = \dot{x}(t)$ em $t = \pi$, deveremos ter

$$\lim_{t\to\pi^-} \text{sen } t = \lim_{t\to\pi^+} (C\cos t + D\text{sen } t + 1)$$

e

$$\lim_{t\to\pi^-} \cos t = \lim_{t\to\pi^+} (-C\text{sen } t + D\cos t)$$

ou seja, $0 = -C + 1$ e $-1 = -D$; segue daí, $C = 1$ e $D = 1$. Assim, para $\pi < t < 2\pi$, $x = \cos t + \text{sen } t + 1$. Para $t > 2\pi$, $\ddot{x} + x = 0$ e, portanto, $x = E\cos t + F\text{sen } t$. Para garantir que a solução seja de classe C^1, deveremos ter

$$\lim_{t \to 2\pi^-} (\cos t + \text{sen } t + 1) = \lim_{t \to 2\pi^+} (E\cos t + F\text{sen } t)$$

e

$$\lim_{t \to 2\pi^-} (-\text{sen } t + \cos t) = \lim_{t \to 2\pi^+} (-E\text{sen } t + F\cos t).$$

Daí, deveremos ter $E = 2$ e $F = 1$. A solução procurada é então dada por

$$x = \begin{cases} \text{sen } t, & \text{se } \ t \leqslant \pi \\ \cos t + \text{sen } t + 1, & \text{se } \ t < \pi \leqslant 2\pi \\ 2\cos t + \text{sen } t, & \text{se } \ t > 2\pi. \end{cases}$$

6. Fazendo $w^2 = \dfrac{1}{LC}$ e $E_1 = \dfrac{E_0}{L}$ a equação dada é equivalente a $\ddot{q} + w^2 q = E_1 \text{sen } w_0 t$. A solução da homogênea associada é $q = A\cos wt + B\text{sen } wt$. Se $w_0 \neq w$, a equação admitirá uma solução particular do tipo $q_p = m\text{sen } w_0 t$; substituindo esta solução particular na equação, resulta $-mw_0^2 \text{sen } w_0 t + mw^2 \text{sen } w_0 t = E_1 \text{sen } w_0 t$ e, portanto, $m = \dfrac{E_1}{w^2 - w_0^2}$. Assim, para $w_0 \neq w$, a solução geral será

$q = A\cos wt + B\text{sen } wt + \dfrac{E_1}{w^2 - w_0^2} \text{sen } w_0 t$. Se $w_0 = w$ ocorrerá ressonância e teremos, então, uma solução particular do tipo $q_p = m_1 t\cos w_0 t + m_2 t\text{sen } w_0 t$. Procedendo como no Exemplo 12, encontraremos a solução particular $q_p = -\dfrac{E_1}{2w_0} \cos w_0 t$.

8. ***c*)** A equação característica da homogênea associada é $\lambda^4 - 16 = 0$, cujas raízes são 2, -2, $2i$ e $-2i$. A equação admite uma solução particular do tipo $x_p = m \text{ sen } t$. Substituindo na equação encontramos $m = 1$. A solução geral será então $x = Ae^{2t} + Be^{-2t} + C\cos 2t + D\text{sen } 2t + \text{sen } t$. Para que as condições iniciais sejam satisfeitas deveremos ter

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 2A - 2B + 2D + 1 = 1 \\ 4A + 4B - 4C = 0 \\ 8A - 8B - 8D - 1 = -1 \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 0 \\ A + B - C = 0 \\ A - B - D = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $A = B = C = D = 0$. Assim, $x = \text{sen } t$ resolve o problema.

e) Temos $\ddot{x} + 4x = \cos 2t$ e $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Como cos $2t$ é solução da homogênea associada, estamos no caso de ressonância, ou seja, teremos uma solução particular do tipo $x_p = m_1 t\cos 2t + m_2 t\,\text{sen}\,2t$. Substituindo na equação, encontraremos $m_1 = 0$ e $m_2 = \frac{1}{4}$. A solução procurada é então $x = \frac{1}{4}\,t\,\text{sen}\,2t$.

Exercícios 11.6

1. Queremos a solução de $\ddot{x} + 4x = \text{sen}\,t$ satisfazendo as condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$. Pela transformada de Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,(\ddot{x} + 4x)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\text{sen}\,t\,dt$$

Temos

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,\ddot{x}\,dt = s^2 \int_0^{\infty} e^{-st}\,x\,dt - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2 \int_0^{\infty} e^{-st}\,x\,dt$$

e, pela tabela das transformadas de Laplace,

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,\text{sen}\,t\,dt = \frac{1}{s^2+1}.$$

Substituindo na equação anterior, resulta

$$(s^2+4)\int_0^{\infty} e^{-st}\,x\,dt = \frac{1}{s^2+1}, \text{ ou seja, } \int_0^{\infty} e^{-st}\,x\,dt = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

Temos

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{ms+n}{s^2+4}.$$

Então, para todo s devemos ter

$$1 = (a+b)(s^2+4) + (ms+n)(s^2+1)$$

ou seja,

$$1 = (a+m)s^3 + (b+n)s^2 + (4a+m)s + 4b + n.$$

Devemos ter então $a + m = 0$, $b + n = 0$, $4a + m = 0$ e $4b + n = 1$. Resolvendo, obtemos $a = 0$, $b = \dfrac{1}{3}$, $m = 0$ e $n = -\dfrac{1}{3}$. Então,

$$\int_0^\infty e^{-st}\ x\ dt = \frac{1}{3(s^2+1)} - \frac{1}{3(s^2+4)} = \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-st}\ \text{sen}\ t\ dt - \frac{1}{6}\int_0^\infty e^{-st}\ \text{sen}\ 2t\ dt.$$

A solução procurada é então $x = \dfrac{1}{6}\,(2\text{sen}\ t - \text{sen}\ 2t)$.

4. Aplicando a transformada de Laplace aos dois membros e levando em conta as condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$, obtemos

$$s^2\int_0^\infty e^{-st}\ x\ dt + 2s\int_0^\infty e^{-st}\ x\ dt + \int_0^\infty e^{-st}\ x = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1}$$

ou seja,

$$(s+1)^2\int_0^\infty e^{-st}\ x = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1}$$

e, portanto,

$$\int_0^\infty e^{-st}\ x = \frac{1}{s^2(s+1)^2} + \frac{1}{(s-1)(s+1)^2}.$$

Tendo em vista que

$$\frac{1}{s^2(s+1)^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1}$$

e

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)^2} = \frac{1}{4(s-1)} - \frac{2}{2(s+1)^2} + \frac{1}{4(s+1)}$$

resulta

$$\int_0^\infty e^{-st}\ x = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{4(s-1)} + \frac{7}{4(s+1)} + \frac{1}{2(s+1)^2}.$$

Pela tabela das transformadas de Laplace, obtemos a solução do problema que é
$x = -2 + t + \frac{1}{4}\, e^{t} + \frac{7}{4}\, e^{-t} + \frac{1}{2}\, te^{-t}.$

6. Aplicando a transformada de Laplace aos dois membros e levando em consideração as condições iniciais, resulta

$$(s^2 + 4)\int_0^{\infty} e^{-st}\ x\, dt = \frac{1}{(s-1)^2 + 1},\ \text{ou seja,}\ \int_0^{\infty} e^{-st}\ x\, dt = \frac{1}{(s^2+4)(s^2-2s+2)}.$$

Precisamos primeiro decompor o segundo membro numa soma de frações parciais

$$\frac{1}{(s^2+4)(s^2-2s+s)} = \frac{as+b}{s^2+4} + \frac{ms+n}{s^2-2s+1}$$

onde as constantes *a, b, m* e *n* devem ser determinadas de modo que, para todo *s*, tenhamos

$$1 = (as + b)(s^2 - 2s + 2) + (ms + n)(s^2 + 4)$$

ou seja,

$$1 = (a + m)s^3 + (b - 2a + n)s^2 + (2a - 2b + 4m)s + 2b + 4n$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} a + m = 0 \\ -2a + b + n = 0 \\ 2a - 2b + 4m = 0 \\ 2b + 4n = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos a $a = \frac{1}{10}$, $b = -\frac{1}{10}$, $m = -\frac{1}{10}$ e $n = \frac{3}{10}$. Temos então

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\ x\, dt = \frac{s}{10(s^2+4)} - \frac{2}{20(s^2+4)} - \frac{s-1}{10[(s-1)^2+1]} + \frac{2}{10[(s-1)^2+1]}.$$

Pela tabela das transformadas de Laplace resulta

$$x = \frac{1}{10}\left(\cos 2t - \frac{1}{2}\,\text{sen}\ 2t - e^{t}\cos t + 2e^{t}\ \text{sen}\ t\right)$$

que é a solução procurada.