CAPÍTULO 12

Exercícios 12.3

5. *a*) Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, a solução será da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + k_2 \begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

ou da forma ($\lambda_1 = \lambda_2$)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + k_2 \left\{ \begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} \right\} e^{\lambda_1 t}.$$

Em qualquer caso, $\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$.

***b*)** Neste caso, a solução será da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} a_{12} \cos \beta t \\ m \cos \beta t - \beta \operatorname{sen} \beta t \end{bmatrix} \right\} + k_2 \begin{bmatrix} a_{12} \operatorname{sen} \beta t \\ m \operatorname{sen} \beta t + \beta \cos \beta t \end{bmatrix} e^{\alpha t}$$

onde $m = \alpha - a_{11}$. (Veja página 278, da Seção 12.1.)
Com $\alpha < 0$, segue $\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = (0,0)$.
***c*)** Sendo $\alpha = 0$, a solução será da forma

$$\begin{cases} x = A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t \\ y = M \cos \beta t + N \operatorname{sen} \beta t \end{cases}$$

que é a equação de uma elipse. (Verifique.)

***d*)** Se $\lambda_1 > 0$, a equação admitirá uma solução da forma $x = m_1 e^{\lambda_1 t}$ e $y = n_1 e^{\lambda_1 t}$, com m_1 e n_1 reais. Então,

$$\lim_{t \to +\infty} \|(x(t), y(t))\| = +\infty.$$

7. A equação característica do sistema é $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\, \lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Para que as trajetórias das soluções sejam elipses é necessário que as raízes sejam complexas e com $\alpha = 0$. Assim, uma condição necessária para que as trajetórias sejam elipses é que $a_{11} + a_{22} = 0$. Se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, então esta condição será, também, suficiente.

8. Suponhamos que exista uma curva fechada γ, orientada no sentido anti-horário, definida em $[a, b]$ e tal que $\gamma'(t) = \vec{v}(\gamma(t))$, para todo $t \in [a, b]$. Como $Q(x, y)\vec{i} - P(x, y)\vec{j}$ é ortogonal a $\vec{v}$ segue que

$$\int_\gamma Q\,dx - P\,dy = \int_a^b [Q(\gamma(t))\vec{i} - P(\gamma(t))\vec{j}] \cdot \vec{v}(\gamma(t))\,dt = 0.$$

Por outro lado, pelo teorema de Green

$$\int_\gamma Q\,dx - P\,dy = \iint_k \left(-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy < 0,$$

pois $div\,\vec{v} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} > 0$ em $\mathbb{R}^2$. Logo, não pode existir tal curva γ.

9. Tomando $P(x, y) = a_{11}x + a_{12}y$ e $Q(x, y) = a_{21}x + a_{22}y$ resulta que $div\,\vec{v} = a_{11} + a_{22}$. Pelo Exercício 8, se $div\,\vec{v} \neq 0$, não poderá existir curva fechada que seja solução do sistema. Logo, deveremos ter necessariamente $a_{11} + a_{22} = 0$.

10. ***a)*** $a_{11} + a_{22} = 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 > 0$. Pelo Exercício 7, as trajetórias das soluções são elipses.
b) $a_{11} + a_{22} = 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -1 < 0$. As trajetórias das soluções não são elipses.

12. $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -2.$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ são autovetores associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda = 0$ e $\lambda - 2$.
A solução geral do sistema é

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Para que as condições iniciais $S_1(0) = 15$ e $S_2(0) = 5$ sejam verificadas, basta tomar $k_1 = 10$ e $k_2 = 5$.

a) No instante $t \geqslant 0$, as quantidades de sal nos tanques 1 e 2 são, respectivamente, $S_1 = 10 + 5e^{-2t}$ e $S_2 = 10 - 5e^{-2t}$.

b) $\lim_{t\to\infty} S_1(t) = 10 = \lim_{t\to\infty} S_2(t)$. O que significa que, para t grande, as quantidades de sal nos dois tanques serão praticamente iguais.

13. A equação característica é

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = 0.$$

a) Os autovalores deverão ser ambos negativos. Deveremos ter, então, $a_{11} + a_{22} < 0$ e $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} > 0$.

b) As raízes deverão ser complexas, com $\alpha < 0$. Deveremos ter, então, $a_{11} + a_{22} < 0$ e o discriminante da equação característica também negativo.

19. Sendo $C(t) = (x(t))^2 + (y(t))^2$, temos $\dot{C} = 2x\,\dot{x} + 2y\,\dot{y}$. De $\dot{x} = 3x + y$ e $\dot{y} = -x + 5y$, resulta $\dot{C} = 6\,(x(t))^2 + 10\,(y(t))^2 \geqslant 0$ para todo $t \geqslant 0$. O que significa que a distância do ponto à origem é crescente.

Exercícios 12.4

3. Os autovalores são: -1, 2 e 1. Os autovetores associados, respectivamente, a estes autovalores são:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \qquad \text{(verifique)}$$

A solução geral do sistema é

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} e^{-t} + k_2 \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} e^{2t} + k_2 \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} e^{t}.$$

Para que a solução satisfaça a condição inicial $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ e $z(0) = z_0$, deveremos tomar $k_1 = 3x_0 - y_0 - z_0$, $k_2 = -x_0 + z_0$ e $k_3 = -x_0 + y_0$. (Verifique.)

a) Se $x_0 = y_0 = z_0$, $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = x_0 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} e^{-t}$. Logo,

$\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$.

b) Se $(x_0, y_0, z_0) \notin \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, então teremos $k_2 \neq 0$ ou $k_3 \neq 0$. Logo,

$$\lim_{t \to \infty} \| (x(t), y(t), z(t) \| = +\infty.$$

Exercícios 12.5

3. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 2y + 6\cos t \\ \dot{y} = x - \cos t. \end{cases}$

Vamos primeiro determinar a solução da homogênea associada.

Os autovalores são -2 e -1; $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ são autovetores associados respectivamente a esses autovalores. Assim, a solução geral da homogênea associada é

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Uma solução particular é dada por

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = c_1(t) \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} + c_2(t) \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6\cos t \\ -\cos t \end{bmatrix} dt.$$

Temos

$$\begin{bmatrix} 2e^{-2t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & -2e^{t} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & -2e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6\cos t \\ -\cos t \end{bmatrix} dt =$$

$$= \int \begin{bmatrix} 5e^{2t}\cos t \\ -4e^{t}\cos t \end{bmatrix} dt.$$

Daí, $c_1(t) = \int 5e^{2t} \cos t \, dt$ e $c_2(t) = \int -4\, e^{t} \cos t \, dt$.

Integrando, obtemos

$c_1(t) = e^{2t}\,(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$ e $c_2(t) = -2\, e^{t}\,(\cos t + \operatorname{sen} t)$.

Daí,

$$
\begin{aligned}
x_p &= 2c_1(t)\, e^{-2t} + c_2(t)\, e^{-t} \\
&= 2(2 \cos t + \operatorname{sen} t) - 2\,(\cos t + \operatorname{sen} t) \\
&= 2 \cos t
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
y_p &= -c_1(t)\, e^{-2t} - c_2(t)\, e^{-t} \\
&= -(2 \cos t + \operatorname{sen} t) + 2(\cos t + \operatorname{sen} t) \\
&= \operatorname{sen} t.
\end{aligned}
$$

A solução geral da equação é então

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}}_{①} + \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix}.
$$

Para t grande, a parcela ① será desprezível e a solução se reduzirá praticamente à solução de *estado permanente* que é $\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$, cuja trajetória é uma elipse.