Capítulo 13

Exercícios 13.1

3. Seja a equação $y'' + \dfrac{x-2}{x^2 - x}\, y' = 0$.

Como no Exercício (1) item (e), $y = A + B \ln x + \dfrac{B}{x}$.

$y(2) = B \ln 2 + \dfrac{B}{2} + A = 0$

$y'(x) = \dfrac{B}{x} - \dfrac{B}{x^2} \Rightarrow y'(2) = \dfrac{B}{2} - \dfrac{B}{4} = 1 \Rightarrow B = 4.$

$4 \ln 2 + 2 + A = 0 \Rightarrow A = -2(1 + 2 \ln 2).$

A solução procurada é $y = -2(1 + 2 \ln 2) + 4\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right).$

4. Pela 2.ª Lei de Newton, $m\dfrac{dv}{dt} = F$. Mas $m = 1$ e $F(t, v) = \dfrac{v}{1+t}$. Então,

$\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{v}{1+t}$, $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{dt}{1+t}$, $\displaystyle\int \dfrac{dv}{v} = \int \dfrac{dt}{1+t}$, ou seja, $\ln|v| = \ln(1+t) + \ln c$, com $c > 0$ e $t \geqslant 0$.

$\ln|v| = \ln c(1+t) \Rightarrow |v| = c(1+t)$

$|v_0| = c.$

Para $v_0 > 0$ ($v_0 < 0$), pelo teorema da conservação do sinal, podemos supor $v > 0$ ($v < 0$), para t próximo de 0. Segue que $v = v_0 + v_0 t$, $t \geqslant 0$, isto é, a partícula descreve movimento retilíneo uniformemente variado com aceleração v_0.

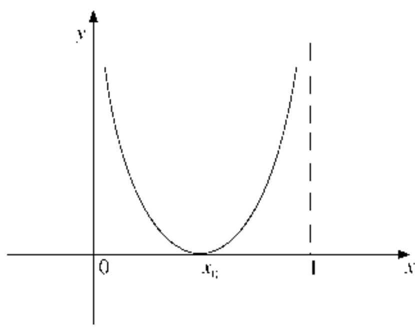
5. Sejam $y + f(x)$ e $y = g(x)$, $x \in I$, soluções de $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$, com $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ e $g(x_0) \neq 0$.
Seja α tal que $f(x_0) = \alpha\, g(x_0)$.
Como a equação é linear homogênea, a função $h(x) = f(x) - \alpha\, g(x)$ é solução e satisfaz $h(x_0) = f(x_0) - \alpha\, g(x_0) = \alpha\, g(x_0) - \alpha\, g(x_0) = 0$ e $h'(x_0) = f'(x_0) - \alpha\, g'(x_0) = 0$, pois $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$.
Pelo Exemplo 2 da Seção 13.1, temos que $h(x) = 0$, isto é, $f(x) - \alpha\, g(x) = 0$,

ou seja, $f(x) = \alpha\, g(x)$, $x \in I$.

6. Pelas hipóteses, $\varphi(x)$, $x \in I$, é solução da equação do exercício anterior, $\varphi(x_0) \neq 0$ e $\varphi(x_1) = 0$, com x_0 e x_1 em I. Pelo Exemplo 2, se tivéssemos, também, $\varphi'(x_1) = 0$ teríamos $\varphi(x) = 0$, para todo $x \in I$ o que contraria a hipótese $\varphi(x_0) = 0$. Logo, deveremos ter $\varphi'(x_1) \neq 0$.

7. Seja $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, uma solução da equação $y'' - (x^2 + 1)\, y = 0$
Então, $f''(x_0) - (x^2 + 1)\, f(x_0) = 0$.
Como $f(x_0) = 0$, segue que $f''(x_0) = 0$.
Pelo Exemplo 2, das hipóteses $f(x_1) \neq 0$ e $f(x_0) = 0$ segue $f'(x_0) \neq 0$.
Como $f'''(x) - 2xf(x) - (x^2 + 1)\, f'(x) = 0$, temos $f'''(x_0) = (x_0^2 + 1) f'(x_0) \neq 0$.
Logo, x_0 é ponto de inflexão, pois $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$. (Veja Vol. 1.)

8. Não. Supondo $y = f(x)$ solução, temos:



$$y'' + xy' + \frac{1}{x^2 - x}\, y = 0,$$

$f(x_0) = 0$ e $f'(x_0) = 0$.

Pelo teorema de existência e unicidade, $y = f(x)$ teria que ser a solução nula. Portanto, a função $y = f(x)$, $0 < x < 1$, cujo gráfico está apresentado, não pode ser solução da equação.

9. ***a*)** Podem: a equação $y'' + y = 0$ admite as soluções $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$ que se interceptam.

***b*)** Não. Se no ponto de abscissa x_0 admitisse a mesma reta tangente, teríamos $f'(x_0) = g'(x_0)$; como, por hipótese, $f(x_0) = g(x_0)$, do teorema de existência e unicidade $f(x) = g(x)$ para todo x em I, o que contraria a hipótese de f e g serem distintas.

10. Supondo que $y = f(x)$, $x \in I$, seja uma solução não nula de $y'' + q(x)\,y = 0$, onde $q(x)$ é contínua em I e $q(x) < 0$, $\forall x \in I$.
Supondo que existam $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, tais que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Como f é contínua, pelo teorema de Weierstrass f assumirá em $[x_1, x_2]$ valor máximo e valor mínimo. Como f não é identicamente nula neste intervalo ou o valor máximo ou o valor mínimo será diferente de zero. Suponhamos que o valor máximo seja diferente de zero e que seja assumido em $c \in \,]x_1, x_2[$. Devemos ter então $f(c) > 0$ e $f'(c) = 0$. Pelo fato de f ser solução da equação e de $q(x) < 0$, segue $f''(c) = -q(c)\,f(c) > 0$ que contradiz o fato de $f(c)$ ser valor máximo. Com raciocínio análogo chega-se a uma contradição se tivésssemos suposto o valor mínimo diferente de zero.

11. Pelo Exercício 10, $y = \text{sen}\, x$ não pode ser solução da equação pois se anula mais de uma vez em $\mathbb{R}$.

12. Suponhamos que $f(x)$ se anula em um número infinito de vezes num intervalo $[a, b]$ contido em I.
Construamos uma seqüência de intervalos $[a_n, b_n]$ tal que $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n \geqslant 1$. Além disso, $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$ e, para todo n, existem $s_n < t_n$ em $[a_n, b_n]$, com $f(s_n) = f(t_n) = 0$. Dessa forma, teremos provado, pois pelo teorema de Rolle $\exists\, k_n \in \,]s_n, t_n[$ com $f'(k_n) = 0$ e pela propriedade dos intervalos encaixantes,
$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x_0\}$ (um único ponto).
Portanto, sendo f e f' contínuas
$f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) = 0$ e
$f'(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f'(k_n) = 0.$

Vamos então construir a seqüência de intervalos mencionada. Façamos $[a_1, b_1] = [a, b]$. Seja c_1 o ponto médio deste intervalo: $[a_1, c_1]$ ou $[c_1, b_1]$ contém infinitos pontos; chamemos de $[a_2, b_2]$ aquele que contém infinitos pontos. Teremos então $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$ e $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$. Repetindo este procedimento construiremos a seqüência $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ de intervalos encaixantes, com $b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^n}$ e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, e cada um dos intervalos $[a_n, b_n]$ contendo infinitos pontos.

13. Não.
A função $f(x)$ se anula em infinitos pontos no intervalo $[-1, 1]$.

15. Seja $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ admitindo $y = x^2$, $x > 0$ e $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ como soluções.

Temos $\quad y = x^2 \quad y' = 2x \quad y'' = 2$

$\quad\quad\quad y = x^{-1} \quad y' = -x^{-2} \quad y'' = 2x^{-3}$

Substituindo na equação,

$$\begin{cases} 2 + 2\,p(x) \cdot x + q(x) \cdot x^2 = 0 \\ \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{p(x)}{x^2} + \dfrac{q(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

Como $x > 0$, temos

$$\begin{cases} 2 + 2p(x) \cdot x + q(x) \cdot x^2 = 0 \\ 2 - 2p(x) \cdot x + q(x) \cdot x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2p(x) \cdot x + q(x) \cdot x^2 = 0 \\ 4 - 2p(x) \cdot x + 2q(x) \cdot x^2 = 0 \end{cases}$$

$3q(x) \cdot x^2 = -6 \qquad q(x) = -\dfrac{2}{x^2} \qquad$ e $p(x) = 0$

A equação procurada é:

$$y'' - \frac{2}{x^2}\, y = 0,\ x > 0.$$

Exercícios 13.2

2. Sejam $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 1$

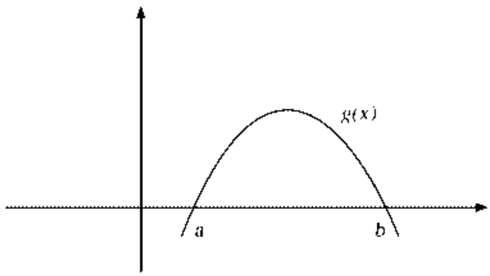
a) $W(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 1 \\ \cos x & 0 \end{vmatrix} = -\cos x$

b) Não, pois $W\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

c) Pelo corolário da Seção 13.2, $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 1$ não podem ser soluções de $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$, $x \in \mathbb{R}$

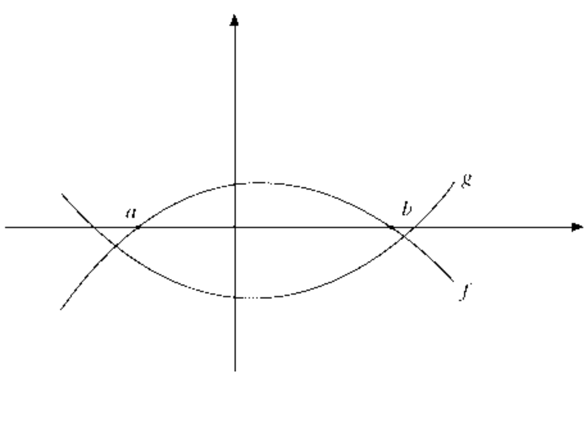
4. $W(x)$ é contínua e não se anula em I. Portanto, $W(x)$ não muda de sinal em I. Temos: $W(x) = f(x)\, g'(x) - f'(x)\, g(x)$.

Segue $W(a) = f(a)\, g'(a)$ e $W(b) = f(b)\, g'(b)$ (por hipótese, $g(a) = g(b) = 0$).
$g'(a)$ e $g'(b)$ têm sinais contrários, pois a e b são zero consecutivos de $g(x)$.



De fato, se $g'(a)$ e $g'(b)$ fossem, digamos, positivos, pelo teorema da conservação do sinal existiria $r > 0$ tal que $g'(x) > 0$, para $a \leqslant x < a + r$ ou $a - r < x \leqslant b$. Existiriam, então, x_1 e x_2, com $a < x_1 < a + r < a - r < x_2 < b$, tais que $f(x_1) > f(a) = 0$ e $f(x_2) < f(b) = 0$; daí, pelo teorema de Bolzano, existiria c no intervalo de extremos a e b tal que $f(c) = 0$, que contraria a hipótese de a e b serem zeros consecutivos.
Como $W(a)$ e $W(b)$ têm o mesmo sinal, $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários. Pelo teorema de Bolzano, existe $c \in\,]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

5. Sejam f e g duas funções definidas em $\mathbb{R}$ e deriváveis até a 2.ª ordem, cujos gráficos têm os seguintes aspectos:



Como $x = a$ e $x = b$ são zeros consecutivos de $f(x)$, pelo Exercício 4, $g(x)$ tem que ter um zero em $]a, b[$, o que não ocorre.

Exercícios 13.3

1. *a*) Pelo Exemplo 2, da Seção 13.3, f e g são linearmente dependentes se e somente se existir um número real k, tal que, $f(x) = kg(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Sejam $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$
Se sen x e 1 são l. d. então sen $x = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$; mas sen x não é constante. Portanto, $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = 1$ são linearmente independentes.

***b*)** $W(x) = \begin{vmatrix} \text{sen}\, x & 1 \\ \cos x & 0 \end{vmatrix} = -\cos x$

$$W(x) = 0 \text{ para } x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Isto não contradiz o teorema, pois não existem funções $p(x)$ e $q(x)$ contínuas em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = 1$ sejam soluções de $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2. *a*) Sejam $f(x) = x^5$ e $g(x) = |x|^5$, $x \in \mathbb{R}$

Temos $g(x) = \begin{cases} x^5, & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x^5, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $\quad g'(x) = \begin{cases} 5x^4, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -5x^4, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^5 & x^5 \\ 5x^4 & 5x^4 \end{vmatrix} = 0, \text{ se } x > 0$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^5 & -x^5 \\ 5x^4 & -5x^4 \end{vmatrix} = 0, \text{ se } x < 0$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ se } x = 0$$

Portanto, $W(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

***b*)** Seja $x^5 = k\,|x^5|$.
Fazendo $x = 1$ temos $k = 1$.
Fazendo $x = -1$ temos $k = -1$.
Portanto, não existe k tal que $x^5 = k|x^5|$, para todo x, logo f e g não são linearmente dependentes. Então f e g são linearmente independentes.

***c*)** Pelo teorema da seção, não existe equação do tipo $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ que admita f e g como soluções.

3. Sejam α e β reais que $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ para todo x em I. Segue daí e pelo fato de f e g serem deriváveis que $\alpha f'(x) + \beta g'(x) = 0$ para todo x. Como, por hipótese, $W(x_0) \neq 0$, a única solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = 0 \\ \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) = 0 \end{cases}$$

é a solução trivial $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Logo, as funções são linearmente independentes em I.

4. Não.

Como vimos no Exercício 2, $f(x) = x^5$ e $g(x) = |x|^5$ são linearmente independentes, mas o wronskiano de f e g é identicamente nulo.

5. Não.

Pelo teorema da seção, se f e g são linearmente independentes e soluções de $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$, então $W(x) \neq 0$, para todo x em I.

Como existe $x_0 \in I$ tal que $W(x_0) = 0$ e f e g são linearmente independentes então não existe uma equação que admita f e g como soluções.

6. Sendo $f(x)$ e $g(x)$, $x \in I$, soluções de $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ deveremos ter, para todo x em I,

$$\begin{cases} p(x)f'(x) + q(x)f(x) = -f''(x) \\ p(x)g'(x) + q(x)g(x) = -g''(x). \end{cases}$$

Como $W(x) \neq 0$ para todo x em I, segue que para cada x em I o sistema admite uma única solução $(p(x), q(x))$, onde $p(x) = \dfrac{g(x)f''(x) - f(x)g''(x)}{W(x)}$ e

$q(x) = \dfrac{f'(x)g''(x) - f''(x)g'(x)}{W(x)}$, x em I. Sendo f e g são de classe C^2 em I, segue que p e q são contínuas em I. Então, a equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ admite f e g como soluções.

7. ***a***) Sejam $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1$, para todo x. Pelo Exercício 3, sen x e cos x são linearmente independentes.

b) Sejam α e β tais que, para todo x, $\alpha x^3 + \beta |x|^3 = 0$. Fazendo $x = 1$ e, em seguida, $x = -1$, obtemos o sistema linear homogêneo $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$ cuja única solução é a trivial $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Logo, as funções são linearmente independentes.

c) Sejam $f(x) = \ln x, x > 0$ e $g(x) = \ln x^2, x > 0$.
As funções são linearmente dependentes, pois $\ln x^2 = 2 \ln x, x > 0$.

d) Sejam $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ e $g(x) = 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x$
Temos:
$f(x) = \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}(2x + r) = \operatorname{sen} 2x \cos x + \operatorname{sen} x \cos 2x =$
$\quad = 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x + \operatorname{sen} x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) =$
$\quad = 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x = 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x = g(x)$
Portanto, $f(x) = g(x)$ e $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente dependentes.

e) Sejam $f(x) = x$ e $g(x) = \ln x, x > 0$.
Supondo (por absurdo) que $f(x) = x$ e $g(x) = \ln x$ são l.d., segue que $x = k \ln x, x > 0$.
Fazendo $x = 1$ obtemos $1 = k \ln 1 = 0$ (absurdo).
Portanto, x e $\ln x, x > 0$, são linearmente independentes (l. i.)

Exercícios 13.4

2. ***a***) $xy'' + y' = 0, x > 0$

$$(x\,y')' = 0 \;\Rightarrow\; xy' = B \;\Rightarrow\; y' = \frac{B}{x} \;\Rightarrow\; y = A + B \ln x,\, x > 0$$

b) $y'' + \dfrac{1}{x} y' - \dfrac{1}{x^2} y = 0,\, x > 0$

Vamos procurar solução do tipo $y = x^2$. Temos $y' = \alpha x^{\alpha - 1}$ e $y'' = \alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha - 2}$
Substituindo na equação e simplificando:
$\alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha - 2} + \dfrac{1}{x} \alpha x^{\alpha - 1} - \dfrac{1}{x^2} x^{\alpha} = 0$
$\alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha - 2} + \alpha\, x^{\alpha - 2} - x^{\alpha - 2} = 0$
$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - 1 = 0 \qquad \alpha^2 - \alpha + \alpha - 1 = 0 \qquad \alpha^2 = 1 \qquad \alpha = \pm 1$
$y_1 = x$ e $y_2 = \dfrac{1}{x}$ são duas soluções l. i.

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -1 - \frac{1}{x} \neq 0, \;\; x > 0$$

A solução geral é $y = Ax + \dfrac{B}{x},\;\; x > 0$.

c) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,\ x > 0$

Vamos procurar solução da forma $y = x^2$. Então,

$$x^2\alpha(\alpha - 1)\,x^{\alpha - 2} - 2x\alpha x^{\alpha - 1} + 2x^{\alpha} = 0$$
$$\alpha\,(\alpha - 1)\,x^{\alpha} - 2\alpha x^{\alpha} + 2x^{\alpha} = 0$$
$$\alpha^2 - \alpha - 2\alpha + 2 = 0$$
$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \text{ e } \alpha = 1$$

Portanto, $y_1 = x^2$ e $y_2 = x$ são soluções l. i.

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = -x^2 \neq 0,\ \ x > 0$$

A solução geral é

$$y = Ax^2 + Bx,\ x > 0.$$

3. Para determinar uma equação $y'' + p(x) \cdot y' + q(x)\,y = 0$ que admita $y = x$ e $y = xe^x$ como soluções, $x > 0$, vamos proceder como no Exercício 6 da Seção 13.3:

Sejam $f(x) = x$ e $g(x) = xe^x$.

Temos $p(x) = \dfrac{gf'' - fg''}{W(x)}$ e $q(x) = \dfrac{f'g'' - g'f''}{W(x)}$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = xe^x + x^2e^x - xe^x = x^2e^x.$$

$f'(x) = 1,\qquad g'(x) = e^x + xe^x,$

$f''(x) = 0$ e $g''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x.$

Daí,

$$p(x) = \frac{-2xe^x - x^2e^x}{x^2e^x} = -\frac{2}{x} - 1$$
$$q(x) = \frac{2e^x - xe^x}{x^2e^x} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$$

A equação procurada é:

$$y'' - \left(\frac{2}{x} + 1\right)y' + \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right)y = 0,\ \ x > 0.$$

Como $f(x) = x$ e $g(x) = xe^x$ são l.i., a solução geral da equação encontrada é

$y = Ax + Bxe^x,\ x > 0.$

6. Seja a equação $y'' - xy = 0$

Vamos procurar solução da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (conforme Exemplo 3 da Seção 8.3).

Temos $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $\qquad$ $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2}$

Substituindo as expressões de y e y'' na equação $y'' = xy$, obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ ou ainda}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}}_{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n}$$

Para essa equação ser satisfeita temos de igualar os coeficientes dos termos semelhantes. Segue que

$2a_2 = 0$ $\qquad$ em geral,

$3 \cdot 2 \cdot a_3 = a_0$ $\qquad$ $(n+2)(n+1)\, a_{n+2} = a_{n-1},\ n \geqslant 1$

$4 \cdot 3 \cdot a_4 = a_1$

Assim temos que a_0 determina a_3; a_3 determina a_6; a_6 determina a_9. Em geral,

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4) \dots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

a_1 determina $a_4, a_7, a_{10}, \dots$ e a_2 determina $a_5, a_8, a_{11}, \dots$. Como $a_2 = 0$ segue que $a_5 = a_8 = a_{11} = \dots = 0$.

A solução geral é

$$y = a_0 \left(1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \dots + \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1) \dots 3 \cdot 2} + \dots \right) +$$

$$+\, a_1 \left(x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \dots + \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3) \dots 4 \cdot 3} + \dots \right)$$

Impondo as condições iniciais $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, temos
$y(0) = a_0 = 1$ $\quad\quad y'(0) = a_1 = 0$
Portanto, a solução é

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\ldots 3\cdot 2}.$$

7. Seja a equação $\left(x^3 \operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)y'' - xy' + y = 0,\ 0 < x < \frac{2}{\pi}$

Vamos proceder como no Exercício (5).
Temos que $y = x$ é solução para $y' = 1,\ y'' = 0$ e $-x + x = 0$.

Toda solução de $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = e^{-\int p(x)\,dx}$ é também solução da equação dada.

$$p(x) = \frac{1}{x^2 \operatorname{tg}\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\cot\mathrm{g}\,\frac{1}{x}$$

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2}\cot\mathrm{g}\,\frac{1}{x}\,dx = \ln\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|$$

mas, como $0 < x < \frac{2}{\pi}$, $\int p(x)\,dx = \ln \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

$$e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-\ln \operatorname{sen}\frac{1}{x}} = \operatorname{cosec}\frac{1}{x}$$

A equação é $xy' - y = \operatorname{cosec}\frac{1}{x}$, ou seja, $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}\operatorname{cosec}\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}\operatorname{cosec}\frac{1}{x}$$

Daí, $\left(\frac{1}{x}y\right)' = \frac{1}{x^2}\operatorname{cosec}\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x}y = \ln\left(\operatorname{cosec}\frac{1}{x} + \cot\frac{1}{x}\right)$$

Portanto, $y = x\ln\left(\operatorname{cossec}\frac{1}{x} + \cot\frac{1}{x}\right)$

A solução geral é

$$y = Ax + Bx \ln\left(\cos\sec\frac{1}{x} + \cot\frac{1}{x}\right), 0 < x < \frac{2}{\pi}$$

Exercícios 13.7

1. Seja $xy'' + y' = 2x$, $x > 0$.

Vamos achar a solução geral da homogênea

$xy'' + y' = 0$ $\qquad$ $y = 1$ é solução

$(xy')' = 0$ $\qquad$ $xy' = c$ $\qquad$ $y' = \dfrac{c}{x}$

Portanto, $y = \ln x$ é solução

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \ln x \\ 0 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} > 0$$

Então, $f(x) = 1$ e $g(x) = \ln x$ são soluções l.i. da equação homogênea.
Para achar solução particular da não-homogêna, vamos usar o método da variação das constantes.

$$y = -f(x)\int \frac{g(x)\,r(x)}{W(x)}\,dx + g(x)\int \frac{f(x)\,r(x)}{W(x)} \qquad \text{(fórmula 2 da Seção 13.7)}$$

onde $f(x) = 1$, $g(x) = \ln x$, $r(x) = 2x$, $W(x) = \dfrac{1}{x}$

$$y = -\int 2x \ln x\, dx + \ln x \int 2x\, dx$$

$$= -x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} + x^2 \ln x = \frac{x^2}{2}$$

A solução geral, portanto, é: $y = A + B\ln x + \dfrac{x^2}{2}$.

Verificando:
$xy'' + y' =$

$$= \left(A + B\ln x + \frac{x^2}{2}\right)'' + \left(A + B\ln x + \frac{x^2}{2}\right)' = x\left(-\frac{B}{x^2} + 1\right) + \left(\frac{B}{x} + x\right) = 2x$$

2. Seja $x^2y'' + xy' - y = x^2, x > 0$

A equação é equivalente a $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{y}{x^2} = 1$.

Vamos achar uma base para o espaço de soluções da equação homogênea $x^2y'' + xy' - y = 0$.
Verificamos, por inspeção, que $y = x$ é solução.
Para encontrar outra solução, vamos resolver

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = e^{-\int p(x)\,dx} \qquad p(x) = \frac{1}{x}$$

$$xy' - y = e^{-\ln x} \qquad \int p(x)\,dx = \ln x$$

$$xy' - y = \frac{1}{x} \text{ ou } y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

Daí, $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^3}$

$$\left(\frac{1}{x}y\right)' = \frac{1}{x^3} \qquad \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2x^2} \qquad y = -\frac{1}{x}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & -1/x \\ 1 & 1/x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

Portanto, $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ são soluções l.i. da equação homogênea.
Para achar solução particular da equação não-homogênea vamos utilizar o método da variação das constantes.

$$y = -f(x)\int \frac{g(x)\,r(x)}{W(x)}\,dx + g(x)\int \frac{f(x)\,r(x)}{W(x)}\,dx$$

Temos

$f(x) = x,\ g(x) = -\frac{1}{x},\ r(x) = 1,\ W(x) = \frac{2}{x}$

$$y = -x \int \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{x}}\, dx - \frac{1}{x} \int \frac{x}{\frac{2}{x}}\, dx =$$

$$= -x \int \left(-\frac{1}{2}\right) dx - \frac{1}{x} \int \frac{x^2}{2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{2} \int dx - \frac{1}{2x} \int x^2 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x}\,\frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{3}.$$

A solução geral é

$$y = Ax + \frac{B}{x} + \frac{x^2}{3}$$

Verificando por derivação,

$$x^2 y'' + xy' - y = x^2 \left(Ax + \frac{B}{x} + \frac{x^2}{3}\right)'' + x\left(Ax + \frac{B}{x} + \frac{x^2}{3}\right)' -$$

$$-\left(Ax + \frac{B}{x} + \frac{x^2}{3}\right) = x^2\left(\frac{2B}{x^3} + \frac{2}{3}\right) + x\left(A - \frac{B}{x^2} + \frac{2x}{3}\right) -$$

$$-\left(Ax + \frac{B}{x} + \frac{x^2}{3}\right) = \frac{2B}{x} + \frac{2x^2}{3} + Ax - \frac{B}{x} + \frac{2x^2}{3} - Ax -$$

$$-\frac{B}{x} - \frac{x^2}{3} = x^2.$$

Exercícios 13.8

1. ***a)*** $x^2 y'' - 2y = 0,\ x > 0.$

Vamos tentar $y = x^m$

$x^2(m(m-1))\, x^{m-2} - 2x^m = 0 \Rightarrow m\,(m-1)\, x^m - 2x^m = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m(m-1) - 2 = 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0\ \ m = 2$ e $m_2 = -1$

Portanto, $y_1 = x^2$ e $y_2 = \dfrac{1}{x}$

Solução geral: $y = c_1\, x^2 + \dfrac{c_2}{x}$

b) $x^2y'' + 3xy' + 2y = 0, x > 0$

Vamos tentar $y = x^m$

$x^2(m\,(m-1))\,x^{m-2} + 3x\,mx^{m-1} + 2x^m = 0 \Rightarrow m(m-1)x^m + 3mx^m\ 1\ 2x^m = 0$

$\Rightarrow m(m-1) + 3m + 2 = 0 \Rightarrow m^2 - m + 3m + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 = -1 + i$ e $m_2 = -1 - i$.

Assim, $y = x^{-1}\,x^i = x^{-1}\,e^{i\ln x} = x^{-1}\,(\cos(\ln x) + i\,\mathrm{sen}(\ln x))$ é solução. Então, a solução geral é: $y = c_1\,x^{-1}\cos(\ln x) + c_2\,x^{-1}\,\mathrm{sen}\,(\ln x)$.

c) $y'' + \dfrac{6}{x^2}\,y = 0,\ \ x > 0.$

$x^2y'' + 6y = 0$. Vamos tentar $y = x^m$.

$x^2(m(m-1))x^{m-2} + 6x^m = 0 \Rightarrow m(m-1)\,x^m + 6x^m = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 - m + 6 = 0 \Rightarrow m_1 = \dfrac{1 \pm \sqrt{23}i}{2}$ e $m_2 = \dfrac{1 - \sqrt{23}i}{2}$

Portanto,

$$y_1 = x^{1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right) \text{ e } y_2 = x^{1/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right).$$

Solução geral: $y = c_1\,x^{1/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right) + c_2\,x^{1/2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right).$

2. Seja a equação $xy'' + xy' + y = 0, x > 0$.

a) Vamos tentar uma solução da forma $\varphi_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$

$$\varphi_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

$$\varphi_1''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

Trocando os índices, temos $\varphi_1'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ e

$$\varphi_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\,a_{n+2}x^n$$

Substituindo na equação,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\,a_{n+2}\;x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,a_{n+1}\;x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

(para essa expressão ser zero, os coeficientes dos potenciais iguais são nulos).
Reescrevendo a expressão,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\,a_{n+2}\;x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,a_{n+1}\;x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} + a_0 = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)\,a_{n+2} + (n+2)\,a_{n+1})\,x^{n+1} + a_0 = 0$$

Daí, $\begin{cases} a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)\,a_{n+2} + (n+2)\,a_{n+1} = 0 \end{cases}$

a_1 é uma constante a ser determinada pelas condições iniciais. Fazendo $a_1 = 1$, temos

① $a_{n+2} = -\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)}$

$$a_2 = -a_1$$
$$a_3 = -\frac{a_2}{2} = \frac{a_1}{2}$$
$$a_4 = -\frac{a_3}{3} = \frac{a_2}{3\cdot 2} = -\frac{a_1}{3\cdot 2}$$

Vamos mostrar, por indução, que $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$

Para $n = 1$ e $n = 2$ é válido.
Supondo que vale para n. Por ①,

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{n} = \frac{-(-1)^{n-1}}{n(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Portanto, $\varphi_1(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,x^n$

b) De $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ segue $e^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$.

$$xe^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

Daí, $\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} x^n = xe^{-x}$

c) Vamos agora procurar outra solução que seja l.i. com φ_1, utilizando a fórmula de Abel-Liouville

$$\begin{vmatrix} xe^{-x} & y \\ e^{-x} - xe^{-x} & y' \end{vmatrix} = e^{-x}$$

$xe^{-x} y' - (e^{-x} - xe^{-x})\, y = e^{-x}$

$xy' + (x - 1)\, y = 1$, ou seja, $y' + \left(\frac{x-1}{x}\right) y = \frac{1}{x}$.

Fator integrante $e^{\int \frac{x-1}{x}\,dx} = \frac{e^x}{x}$.

A equação fica $\left(y\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x}{x^2}$

$\frac{ye^x}{x} = \int \frac{e^x}{x^2}\,dx$. Mas $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$

$\frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + ...$.

$\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \ln x + \frac{1}{2!}x + \frac{x^2}{2 \cdot 3!} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + ...$.

Portanto, $\underbrace{y}_{\varphi_2(x)} = -e^{-x} + xe^{-x} \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} k_k\, x^k$

Mas $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

Portanto, a segunda solução é da forma

$$\varphi_2(x) = xe^{-x} \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

d) A solução geral da equação dada é
$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$,
onde

$$\varphi_2(x) = -e^{-x} + xe^{-x}\ln x + x^2e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)(k+2)!}.$$

3. Seja a equação $xy'' + xy' - y = 0,\ x > 0$

a) $\varphi_1(x) = x \qquad \varphi_1'(x) = 1 \qquad \varphi_1''(x) = 0$
$x - x = 0$
$\varphi_1(x) = x$ é solução

b) Vamos encontrar outra solução l.i. com $\varphi_1(x) = x$, utilizando a fórmula de Abel Liouville

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = e^x \Rightarrow \quad xy' - y = e^x, \qquad \text{onde } y = \varphi_2(x)$$

$$y' - \frac{1}{x}y = e^x$$

Fator integrante $e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \dfrac{1}{x}$

$$\left(\frac{1}{x}y\right)' = \frac{e^x}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}y = \int\frac{e^x}{x}dx, \text{ mas } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots$$

$$\int\frac{e^x}{x}dx = \ln x + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots$$

Portanto, a segunda solução é da forma

$$\varphi_2(x) = x\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

c) Solução geral: $k_1\varphi_1(x) + k_2\varphi_2(x)$

12. ***a***) Seja $y'' = \dfrac{h''(x)}{h(x)}y,\ x \in I.$

Temos $\varphi_1(x) = h(x),\ \ \varphi_1'(x) = h'(x)$ e $\varphi_1''(x) = h''(x)$

$h''(x) = \dfrac{h''(x)}{h(x)}\cdot h(x)$ o que se verifica identicamente em I.

Portanto, $\varphi_1(x) = h(x)$ é solução.

b) Vamos encontrar outra solução l.i.

Seja $y'' - \dfrac{h''(x)}{y(x)}\, y = 0,$

onde $p(x) = 0$ pois $p(x)$ é o coeficiente de y'.

$$\begin{vmatrix} h & y_2 \\ h' & y_2' \end{vmatrix} = e^{-\int p(x)\,dx} = 1$$

$$hy_2' - hy_2 = 1 \Rightarrow y_2' - \frac{h'}{h}\, y_2 = \frac{1}{h}$$

Vamos multiplicar a equação por $e^{-\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx} = e^{-\ln h} = \dfrac{1}{h}.$

Logo,

$$\left(\frac{1}{h}\, y_2\right)' = \frac{1}{h^2} \Rightarrow \frac{1}{h}\, y_2 = \int \frac{dx}{h^2(x)} \Rightarrow y_2 = h(x)\int \frac{dx}{h^2(x)}$$

ou seja, $\varphi_2(x) = h(x)\displaystyle\int \frac{dx}{h^2(x)}$

A solução geral é

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$

ou

$$y = c_1 h(x) + c_2 h(x)\int \frac{dx}{h^2(x)}.$$

13. ***a***) $y'' = \dfrac{2}{x^2}\, y, x \neq 0$

Olhando para o Exercício 12, vemos que a equação é da forma $y'' = \dfrac{h''(x)}{h(x)}\, y$ onde $h(x) = x^2$

Portanto, uma solução é $y_1(x) = x^2$.

A outra solução é dada por

$$y_2(x) = x^2 \int x^{-4}\, dx = \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{x}, \text{ ou seja, } y_2(x) = \frac{1}{x} \quad \left(-\frac{1}{3} \text{ é desnecessário}\right)$$

A solução geral é

$$y(x) = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x}$$

b) $y'' = -\dfrac{y}{x^2 \ln x} \quad \Rightarrow \quad y'' = \dfrac{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln x}\, y$

Então, $h(x) = \ln x$, $h'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $h''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Pelo Exercício 12, uma solução é $y_1(x) = \ln x$.

A outra é dada por $y_2 = \ln x \displaystyle\int (\ln x)^{-2}\, dx$.

A solução geral é

$$y = c_1 \ln x + c_2 \ln x \int (\ln x)^{-2}\, dx$$

c) $xy'' + (2 - x)y = 0, x > 0$.

Seguindo a sugestão, $h(x) = xe^{-x}$, $h'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$, $h''(x) = e^{-x}(x - 2)$

Portanto, $y'' = \dfrac{(x-2)\, e^{-x}}{xe^{-x}}$

Uma solução é $\varphi_1(x) = xe^{-x}$.

A outra é dada por $\varphi_2(x) = xe^{-x} \displaystyle\int \frac{dx}{x^2 e^{-2x}}$

A solução geral é

$$y = c_1 xe^{-x} + c_2 xe^{-x} \int \frac{e^{2x}}{x^2}\, dx$$

d) $x(1 - x)\, y'' + 2y = 0, 0 < x < 1$

$$y'' = -\frac{2}{x - x^2}\, y \quad \text{ou} \quad y'' = \frac{2}{x^2 - x}\, y$$

Seja $h(x) = x^2 - x$, $h'(x) = 2x$, $h''(x) = 2$.

Portanto, uma solução é $\varphi_1(x) = x^2 - x$.

A outra é dada por

$$\varphi_2(x) = (x^2 - x) \int \frac{dx}{(x^2 - x)^2} = (x^2 - x) \int \frac{dx}{x^2 (x-1)^2} =$$

$$= \int \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx =$$

$$= 2 \ln x - \frac{1}{x} - 2 \ln (x-1) - \frac{1}{x-1} =$$

$$= \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}.$$

Assim, $\varphi_2(x) = (x^2 - x) \ln \left(\dfrac{x}{x-1} \right)^2 - (x-1) - x,$

ou seja,

$$\varphi_2(x) = (x^2 - x) \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 - 2x + 1.$$

A solução geral é

$$y = c_1 (x^2 - x) + c_2 \left[(x^2 - x) \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 - 2x + 1 \right].$$

e) $y'' = (1 + 2 \text{ tg}^2 x) \, y, \; 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

Seja $\varphi_1(x) = h(x) = \sec x$; $\varphi_1'(x) = \sec x \text{ tg } x$ e $\varphi_1''(x) = \sec x \text{ tg}^2 x + \sec^3 x$.

$$y'' = \frac{h''(x)}{h(x)} \, y, \text{ ou seja, } y'' = \frac{\sec \text{tg}^2 x + \sec^3 x}{\sec x} \, y.$$

$$\varphi_2(x) = \sec x \int \cos^2 x \, dx = \sec x \left(\frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 2x}{4} \right).$$

A solução geral é

$$y = c_1 \sec x + c_2 \sec x \left(\frac{x}{2} + \text{sen } \frac{2x}{4} \right)$$

16. ***a***) $x^6 y'' + \left(k^2 - \frac{3}{4} x^4\right) y = 0, \; x \neq 0,$ ou seja,

$$y'' = \left(\frac{3}{4}\frac{x^4}{x^6} - \frac{k^2}{x^6}\right) y$$

$$x^6 = \left(x^{3/2}\right)^4$$
$$h(x) = x^{3/2}$$

ou ainda,

$$h'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}, \; h''(x) = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = \left(\frac{3}{4}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^{3/2}} - \frac{k^2}{(x^{3/2})^4}\right) \cdot y.$$

$$p'(x) = \frac{k}{(x^{3/2})^2} = \frac{k}{x^3}.$$

Fazendo $h(x) = x^{\frac{3}{2}}$, teremos $h''(x) = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}}$ e $p'(x) = \frac{k}{x^3}$. Daí, $p(x) = -\frac{k}{2x^2}$.

Pelo Exercício 14, a solução geral é

$$y = x^{\frac{3}{2}}\left[k_1 \operatorname{sen}\left(\frac{k}{2x^2}\right) + k_2 \cos\left(\frac{k}{2x^2}\right)\right]$$

b) $e^{4x} y'' + (k^2 - e^{4x})\, y = 0$, ou seja,

$$y'' = \left(1 - \frac{k^2}{e^{4x}}\right) y.$$

Fazendo $h(x) = e^x$ teremos $h'(x) = e^x$, $h''(x) = e^x$ e $p'(x) = \frac{k}{e^{2x}}$.

Então, $p(x) = -\frac{k}{2e^{2x}}$ e a solução geral será

$$y = e^x\left[k_1 \operatorname{sen}\left(\frac{k}{2e^{2x}}\right) + k_2 \cos\left(\frac{k}{2e^{2x}}\right)\right].$$

20. Seja a equação $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são definidas e contínuas no mesmo intervalo I.

Fazendo
$y = h(x)\, u$ teremos $y' = h'(x)\, u + h(x)\, u'$ e
$y'' = h''(x)\, u + 2h'(x)\, u' + h(x)\, u''$.
Substituindo na equação,
$h''u + 2\, h'u' + hu'' + p(h'u + hu') + qhu = 0$
$h''u + ph'u + qhu + 2h'u' + phu' + hu'' = 0$
ou seja,
$hu'' + (2h' + ph)\, u' + (h'' + ph' + qh)\, u = 0.$

Temos

$2h' + ph = 0 \Leftrightarrow h' = -\dfrac{p}{2}h \Leftrightarrow h = e^{-\frac{p}{2}x}$. Logo, $h(x) = e^{-\frac{p(x)}{2}x}$. Temos

$h' = -\dfrac{p}{2}\, e^{-\frac{p}{2}x}$ e $h'' = \dfrac{p^2}{4}\, e^{-\frac{p}{2}x}$. Segue que

$g(x) = \dfrac{p^2}{4}\, e^{-\frac{p}{2}x} - \dfrac{p^2}{2}\, e^{-\frac{p}{2}x} + qe^{-\frac{p}{2}x}$, ou seja, $g(x) = \left(q(x) - \dfrac{(p(x))^2}{4} \right) e^{-\frac{p(x)}{2}x}$.

21. Seja a equação de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)\, y = 0$. Façamos a mudança de variável $y = x^{-\frac{1}{2}}\, u$, $x > 0$.
Temos:

$y' = -\dfrac{1}{2}\, x^{-\frac{3}{2}}\, u + x^{-\frac{1}{2}}\, u'$ e

$y'' = \dfrac{3}{4}\, x^{-\frac{5}{2}}\, u - \dfrac{1}{2}\, x^{-\frac{3}{2}}\, u' - \dfrac{1}{2}\, x^{-\frac{3}{2}}\, u' + x^{-\frac{1}{2}}\, u''$, ou seja,

$y'' = \dfrac{3}{4}\, x^{-\frac{5}{2}}\, u - x^{-\frac{3}{2}}\, u' + x^{-\frac{1}{2}}\, u''$.

Substituindo na equação,

$x^2\left(\dfrac{3}{4}\, x^{-\frac{5}{2}}\, u - x^{-\frac{3}{2}}\, u' + x^{-\frac{1}{2}}\, u'' \right) + x\left(-\dfrac{1}{2}\, x^{-\frac{3}{2}}\, u + x^{-\frac{1}{2}}\, u' \right) +$

$+ (x^2 - \alpha^2)\, x^{-\frac{1}{2}}\, u = 0$. Daí,

$\dfrac{3}{4}\, x^{-\frac{1}{2}}\, u - x^{\frac{1}{2}}\, u' + x^{\frac{3}{2}}\, u'' - \dfrac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}\, u + x^{\frac{1}{2}}\, u' + x^{\frac{3}{2}}\, u - \alpha^2\, x^{-\frac{1}{2}}\, u = 0,$

ou seja, $\dfrac{3}{4}\, u + x^2u'' - \dfrac{1}{2}\, u + x^2u - \alpha^2u = 0$ e, portanto,

$x^2u'' + \left(x^2 + \dfrac{1}{4} - \alpha^2 \right) u = 0.$

22. Seja $y = \varphi(x)$, com $\varphi(x) \neq 0$ no intervalo aberto I, uma solução de $y'' = g(x) \cdot y$

Seja $u = \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, $x \in I$.

Temos $u' = \dfrac{\varphi''(x)\,\varphi(x) - (\varphi'(x))^2}{(\varphi(x))^2}$.

Mas $\varphi''(x) = g(x)\ \varphi(x)$.

Portanto,

$$u' = \frac{g(x)(\varphi(x))^2 - (\varphi'(x))^2}{(\varphi(x))^2},$$

$$u' = g(x) - \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2$$

e, portanto, $u' = g(x) - u^2$ que é uma equação de Riccati.

23. ***a***) Seja $u = x^{-2}$, $x > 0$, então $u' = -2x^{-3}$.

Substituindo na equação $u' = \underbrace{x^{-4} - 2x^{-3}}_{g(x)} - u^2$ segue

$-2x^{-3} = x^{-4} - 2x^{-3} - x^{-4}$, ou seja,

$-2x^{-3} = -2x^{-3}$.

Portanto, $u = x^{-2}$ é solução da equação de Riccati.

b) $x^4 y'' = (1 - 2x)y$ ou $y'' = \underbrace{(x^{-4} - 2x^{-3})}_{g(x)}\ y$.

Pelo exercício anterior, $\varphi_1(x)$ dada por $x^{-2} = \dfrac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}$ será solução da equação dada.

Resolvendo a equação linear $\varphi_1'(x) = x^{-2}\varphi_1(x)$, obtemos $\varphi_1(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

Vamos encontrar outra solução l.i. com $\varphi_1(x)$.

$$\begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{x}} & y \\ \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & y' \end{vmatrix} = e^0 = 1$$

Daí,

$$e^{-\frac{1}{x}}\, y' - \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, y = 1,$$

$$y' - \frac{1}{x^2}\, y = e^{\frac{1}{x}},$$

$$\left(y\, e^{1/x}\right)' = e^{\frac{2}{x}} \text{ e, daí, } y\, e^{\frac{1}{x}} = \int e^{\frac{2}{x}}\, dx.$$

Mas $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + ... = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$e^{\frac{2}{x}} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{2x^2} + \frac{8}{3!\,x^3} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!\,x^k}.$$

$$\int e^{\frac{2}{x}}\, dx = x + 2 \ln x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k!(k-1)\, x^{k-1}}$$

Assim,

$$\underbrace{\varphi_2(x)}_{y} = xe^{-\frac{1}{x}} + 2e^{-\frac{1}{2}} \ln x + e^{-\frac{1}{x}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k!\,(k-1)\, x^{k-1}}.$$

A solução geral é $y = k_1\varphi_1(x) + k_2\varphi_2(x)$.