Capítulo 14

Exercícios 14.1

1. *a*) Seja $y' + y = xy^3 \Leftrightarrow y' = -y + xy^3$ (equação de Bernoulli)

Temos $f(x, y) = -y + xy^3$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -1 + 3xy^2$

Assim, f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Segue que o Teorema 14.1 pode ser aplicado. A função constante $y = 0$ é solução da equação dada. Então, se $y = y(x)$, $x \in I$, for solução da equação, teremos:

$y(x) = 0$ para todo $x \in I$

ou $y(x) \neq 0$ para todo $x \in I$

Vamos determinar as soluções $y = y(x)$ com $y(x) \neq 0$.
Para $y \neq 0$, a equação é equivalente a $(y^{-2} - x)\,dx + y^{-3}\,dy = 0$ ①
Fazendo $P(x, y) = y^{-2} - x$ e $Q(x, y) = y^{-3}$ vem

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q(x, y)} = \frac{2y^{-3}}{y^{-3}} = 2$$

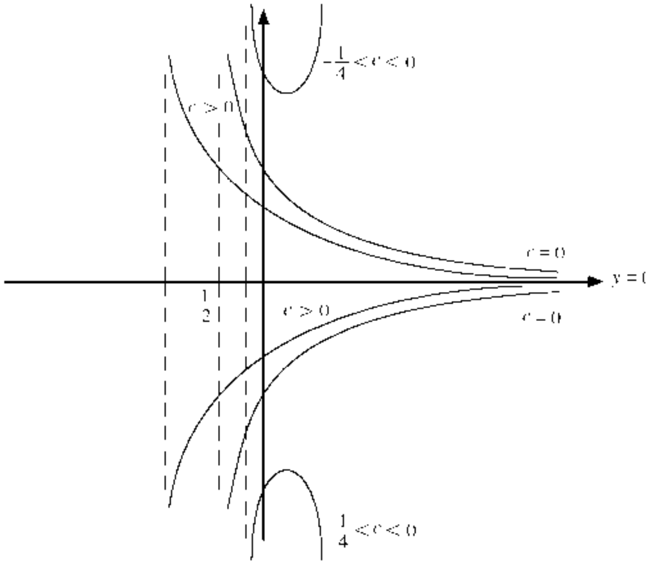
Logo, e^{-2x} é um fator integrante para ①. Como $e^{-2x} \neq 0$ para todo x, ① é equivalente a

$(y^{-2}\,e^{-2x} - xe^{-2x})\,dx + y^{-3}\,e^{-2x}\,dy = 0$ que é uma equação diferencial exata.

Integrando obtemos $y^{-2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}$.

Portanto, $y = 0$

e $y = \dfrac{\pm 1}{\left(x + \frac{1}{2} + ce^{2x}\right)^{1/2}}$ é a família das soluções da equação dada.



b) Seja a equação de Bernoulli $y' + y = xy^{-1}$, $y > 0$.

Fazendo a mudança de variável $v = y^2$ ou $y = v^{1/2}$ temos $y' = \dfrac{1}{2} v^{-1/2} v'$.

Substituindo na equação:

$\dfrac{1}{2} v^{-1/2} v' + v^{1/2} = xv^{-1/2}$ ou $\dfrac{1}{2} v' + v = x$ ou $v' + 2v = 2x$.

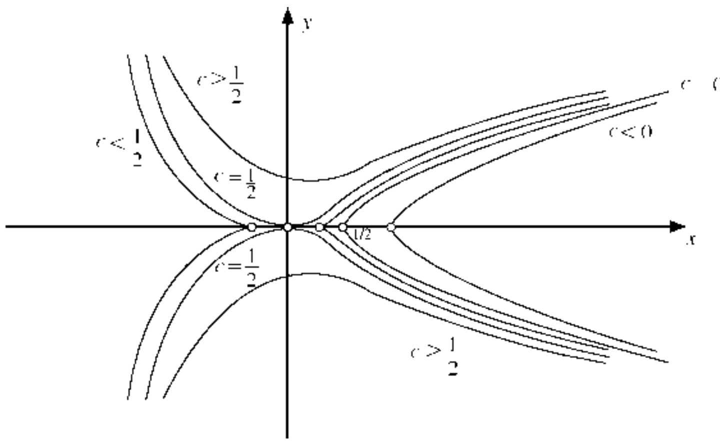
Multiplicando pelo fator integrante e^{2x} temos:

$v'e^{2x} + 2ve^{2x} = 2xe^{2x}$

$(ve^{2x})' = 2xe^{2x} \Rightarrow ve^{2x} = 2\int xe^{2x}\,dx = xe^{2x} - \dfrac{1}{2} e^{2x} + c$

$v = x - \dfrac{1}{2} + ce^{-2x}$

Portanto, $y = \pm\sqrt{x - \dfrac{1}{2} + ce^{-2x}}$ $(c \in \mathbb{R})$.



2. Seja $y = \varphi(x)$, $x \in\,]-r, r[$, uma solução da equação $y' = x^2 + \cos y$ com $\varphi(0) = 0$.

Seja a função $\varphi_1(x) = -\varphi(-x)$.

Temos $\varphi_1'(x) = -\varphi'(-x) \cdot (-1) = \varphi'(-x)$

$\varphi_1(0) = 0$

Vamos mostrar que φ_1 é solução da equação.

$\varphi_1'(x) = \varphi'(-x)$

$(-x)^2 = x^2$

$\cos \varphi_1(x) = \cos(-\varphi(-x)) = \cos(\varphi(-x))$

$\varphi'(-x) = x^2 + \cos(\varphi(-x))$

Como $\varphi(-x)$ é solução, $\varphi_1(x)$ é solução com $\varphi_1(0) = 0$. Pelo teorema da existência e unicidade $\varphi_1 = \varphi$, isto é, $-\varphi(-x) = \varphi(x)$ para todo $x \in\,]-r, r[$, ou seja, φ é função ímpar.

3. Seja $y = \varphi(x)$, $x \in\,]-r, r[$, uma solução da equação $y' = xe^{y^2}$, com $\varphi(0) = y_0$ ($y_0 \in \mathbb{R}$).

Como φ é solução, para todo $x \in\,]-r, r[$, $\varphi'(x) = xe^{[\varphi(x)]^2}$.

Seja $\varphi_1(x) = \varphi(-x)$. Então, $\varphi_1'(x) = -\varphi(-x)$.

Temos que $\varphi'(-x) = (-x)\ e^{[\varphi(-x)]^2}$.

Mas $\varphi'(-x) = -\varphi_1'(x)$. Segue que $-\varphi_1'(x) = (-x)\, e^{[\varphi_1(x)]^2}$, ou seja,

$\varphi_1'(x) = xe^{[\varphi_1(x)]^2}$ o que significa que $\varphi_1(x)$ é solução.

Além disso, $\varphi_1(0) = \varphi(0) = y_0$.

Pelo teorema de existência e unicidade segue que, para todo $x \in \,]-r, r[$,

$\varphi_1(x) = \varphi(x)$, ou seja, $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Logo, φ é uma função par.

4. Seja $P(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \dfrac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{\varphi'''(0)}{3!}x^3 + \dfrac{\varphi^{iv}(0)}{4!}x^4 + \dfrac{\varphi^{v}(0)}{5!}x^5$

o polinômio de Taylor de ordem 5 de φ, em volta de $x_0 = 0$.

Temos:

$\varphi(0) = 0$

$\varphi'(x) = x^2 + \cos\varphi(x) \;\Rightarrow\; \varphi'(0) = 1$

$\varphi''(x) = 2x - \operatorname{sen}\varphi(x)\cdot\varphi'(x) \;\Rightarrow\; \varphi''(0) = 0$

$\varphi'''(x) = 2 - (\cos\varphi(x)\cdot(\varphi'(x))^2 + \operatorname{sen}\varphi(x)\cdot\varphi''(x)) \;\Rightarrow\; \varphi'''(0) = 2 - 1 = 1$

$$\begin{aligned}\varphi^{iv}(x) &= -(-\operatorname{sen}\varphi(x)\cdot(\varphi'(x))^3 + 2\cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\cdot\varphi''(x) \;+\\ &\quad + \cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\cdot\varphi''(x) + \operatorname{sen}\varphi(x)\cdot\varphi'''(x)) =\\ &= \operatorname{sen}\varphi(x)\,(\varphi'(x))^3 - 3\cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\cdot\varphi''(x) - \operatorname{sen}\varphi(x)\cdot\varphi'''(x) \Rightarrow\\ &\quad \Rightarrow \varphi^{iv}(x) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{v}(x) &= \cos\varphi(x)\cdot(\varphi'(x))^4 + 3\operatorname{sen}\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\cdot\varphi''(x) \;+\\ &\quad + 3\operatorname{sen}\varphi(x)\cdot(\varphi'(x))^2\cdot\varphi''(x) - 3\cos\varphi(x)\,(\varphi''(x))^2 \;-\\ &\quad - 3\cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\cdot\varphi''(x) - \cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\cdot\varphi'''(x) - \operatorname{sen}\varphi(x)\,\varphi^{iv}(x) \Rightarrow\\ &\quad \Rightarrow \varphi^{v}(0) = -3.\end{aligned}$$

$P(x) = x + \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{120}x^5$, ou seja, $P(x) = x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{40}$.

6. Seja $y = \varphi(x)$, $x \in \,]-r, r[$ uma solução da equação $y' = x^2 + y^2$ com

$y(0) = y_0$, $y_0 > 0$.

Temos $\varphi'(x) = x^2 + \varphi^2(x)$ em $]-r, r[$.

Daí, $\varphi'(x) \geqslant \varphi^2(x)$ em $]-r, r[$.

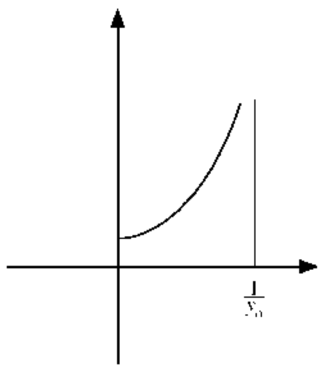
Segue que, para todo $x \in [0, r[$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \geqslant 1$$

Daí, $\displaystyle\int_0^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t)}\,dt \geqslant \int_0^x 1\,dt$, ou seja, $\displaystyle -\frac{1}{\varphi(x)} + \underbrace{\frac{1}{\varphi(0)}}_{y_0} \geqslant x$ e, portanto,

$$\varphi(x) \geqslant \frac{1}{\frac{1}{y_0} - x},\ 0 \leqslant x < \frac{1}{y_0}.$$

Logo, $r < \dfrac{1}{y_0}$.



7. Se $\displaystyle \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt,\ x \in I,$

pelo teorema fundamental do cálculo temos $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Além disso, $\varphi(x_0) = y_0$. Portanto, $y = \varphi(x)$ é solução da equação com a condição $\varphi(x_0) = y_0$.

Por outro lado, se $\varphi(x)$, $x \in I$, for solução, deveremos ter $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $x \in I$.

Daí, $\displaystyle \varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt + k,\ x \in I.$

Tendo em vista a condição $\varphi(x_0) = y_0$, segue

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt,\ x \in I.$$