CONSERVAÇÃO DA ENERGIA NO MOVIMENTO GERAL

Atenção Leia o assunto no livro-texto e nas notas de aula e reproduza os problemas resolvidos aqui. Outros são deixados para v. treinar

☐ **PROBLEMA 1** No Exemplo 1 da Seç. 5.3, considere a situação em que $|\mathbf{F}|$ tem o valor mínimo necessário para manter o bloco deslizando sobre o plano horizontal com velocidade constante. Para um deslocamento l do bloco, exprima o trabalho W realizado pela força $\mathbf{F}$ em função de P, θ, l e do coeficiente μ_c. Que acontece com esse trabalho?

▸ **Solução** O valor mínimo necessário para manter o bloco deslizando com velocidade constante é $F\cos\theta = \mu_c(P - F\operatorname{sen}\theta)$, de onde se obtém

$$F(\cos\theta + \mu_c \operatorname{sen}\theta) = \mu_c P \Rightarrow F = \frac{\mu_c P}{\cos\theta + \mu_c \operatorname{sen}\theta}$$

Assim, o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ é dado por $W = Fl\cos\theta = \dfrac{\mu_c Pl\cos\theta}{\cos\theta + \mu_c \operatorname{sen}\theta}$. Como não há variação da energia cinética do bloco, este trabalho está sendo dissipado pela força de atrito, convertendo-se em calor.

* * *

☐ **PROBLEMA 2** Uma partícula carregada penetra num campo magnético uniforme com velocidade inicial perpendicu!ar à direçâo do campo magnético. Calcule o trabalho realizado pela força magnética sobre a particula ao longo de sua trajetória.

▸ **Solução** Como a partícula descreve sua trajetória no plano perpendicular ao campo magnético$W = Fl\cos\theta$ e $\theta = 90º \Rightarrow W = 0$.

* * *

☐ **PROBLEMA 3** Dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são tais que $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$. Qual é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$?

▸ **Solução** Sejam os vetores $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ e $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Seus módulos são dados por

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = a^2 + b^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$
$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = a^2 + b^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

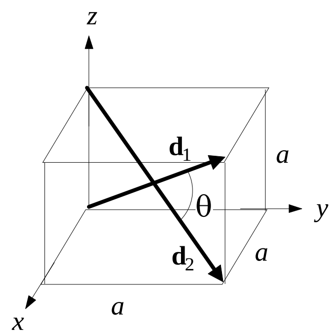
Como $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \Rightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a^2 + b^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$. Logo, o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é $90º$.

* * *

☐ **PROBLEMA 4** Calcu!e o ânguìo entre duas diagonais internas (que passam por dentro) de um cubo, utilizando o produto escalar de vetores.

▸ **Solução** Sejam as diagonais $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ mostradas na figura. Em termos das componentes cartesianas, estes vetores podem ser escritos como

$$\mathbf{d}_1 = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$$
$$\mathbf{d}_2 = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} - a\mathbf{k}$$



Assim,

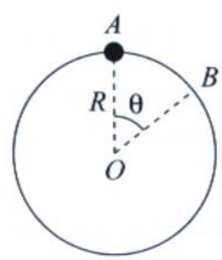
$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = d_1 d_2 \cos\theta = a^2 + a^2 - a^2 = a^2$$

Como $d_1 = d_2 = \sqrt{3}\,a$, então

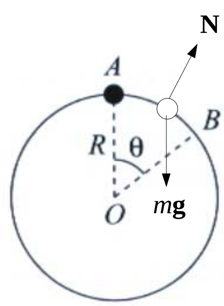
$$\sqrt{3}\,a \times \sqrt{3}\,a \cos\theta = a^2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 70{,}5^{\circ}$$

* * *

☐ **PROBLEMA 5** Uma conta de massa m, enfiada num aro circular de raio R que está num plano vertical, desliza sem atrito da posição A, no topo do aro, para a posição B, descrevendo um ângulo θ (Fig.). (a) Qual é o trabalho realizado pela força de reação do aro sobre a conta? (b) Qual é a velocidade da conta em B?



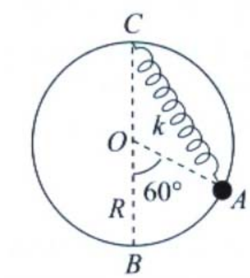
▸ **Solução** (a) A força de reação do aro sobre a conta é sempre perpendicular ao deslocamento desta. Por isso, o trabalho realizado por essa força é nulo.



(b) O trabalho da força peso, e portanto, o trabalho total sobre a conta é $W_{A\to B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}$, onde $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$ e $\mathbf{l} = (R\cos\theta - R)\mathbf{k} = -R(1-\cos\theta)\mathbf{k}.$ Logo, $W_{A\to B} = mgR(1-\cos\theta)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.$ Portanto, $W_{A\to B} = mgR(1-\cos\theta)$, que é igual à variação da energia cinética entre os pontos A e $B.$ Logo, supondo que a conta tenha energia cinética nula em $A,$ ou seja, $T_A = 0,$ então

$$T_B - T_A = mgR(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgR(1-\cos\theta) \Rightarrow v_B = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

☐ **PROBLEMA 6** Um corpo de massa $m = 300$ g, enfiado num aro circular de raio $R = 1$ m situado num plano vertical, está preso por uma mola de constante $k = 200$ N/m ao ponto C, no topo do aro (Fig.). Na posição relaxada da mola, o corpo está em B, no ponto mais baixo do aro. Se soltarmos o corpo em repouso a partir do ponto A indicado na figura, com que velocidade ele chegará a B?



▸ **Solução** A força da mola é dada por $F = -k\Delta s,$ onde $\Delta s = s - s_0.$ O comprimento relaxado $s_0 = 2R$ e $s = \sqrt{(R + R\cos\theta)^2 + R^2\,\text{sen}^2\theta} = \sqrt{\left(R + \frac{R}{2}\right)^2 + R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}R^2 + \frac{3}{4}R^2} = \sqrt{3}\,R.$ Assim, $\Delta s_A = \sqrt{3}\,R - 2R.$ Como só temos forças conservativas, $\Delta T = -\Delta U,$ logo

$$T_A = 0, \qquad T_B = \frac{1}{2}mv^2$$
$$U_A = mgz_A + \frac{1}{2}kx_A^2, \quad U_B = mgz_B + \frac{1}{2}kx_B^2$$

Tomando o nível de referência $z = 0$ no ponto $B,$ isto é, $z_B = 0,$ e sabendo que em B a mola está relaxada $(x_B = 0)$ e $x_A = \Delta s = -R,$ e $z_A = R - R\cos 60^\circ = \frac{R}{2},$ então

$$T_A = 0, \qquad T_B = \frac{1}{2}mv^2$$
$$U_A = mg\frac{R}{2} + \frac{1}{2}k\Delta s_A^2 = mg\frac{R}{2} + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{3}\,R - 2R\right)^2, \quad U_B = mgz_B + \frac{1}{2}kx_B^2 = 0$$

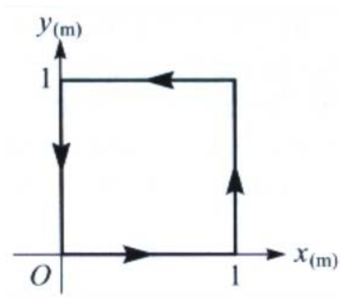
Assim,

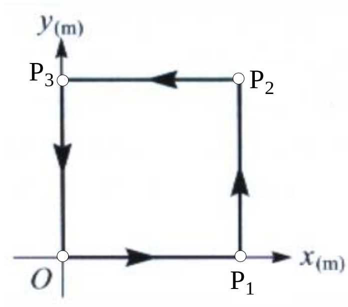
$$T_B - T_A = -(U_B - U_A) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{R}{2} + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{3}\,R - 2R\right)^2 \Rightarrow v = \sqrt{gR + \frac{kR^2\left(\sqrt{3}-2\right)^2}{m}}$$

ou seja, para os valores dados, a velocidade no ponto B vale $v = 7{,}59$ m/s.

* * *

☐ **PROBLEMA 7** Uma partícula se move no plano xy sob a ação da força $\mathbf{F}_1 = 10\,(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$, onde $|\mathbf{F}_1|$ é medido em N, e x e y em m. (a) Calcule o trabalho realizado por $\mathbf{F}_1$ ao longo do quadrado indicado na figura. (b) Faça o mesmo para $\mathbf{F}_2 = 10(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$. (c) O que você pode concluir a partir de (a) e (b) sobre o caráter conservativo ou não de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$? (d) Se uma das duas forças parece ser conservativa, procure obter a energia potencial U associada, tal que $\mathbf{F} = -$ grad U.





▸ **Solução** Usando a definição de trabalho, temos para o da força $\mathbf{F}_1$:

$$W_1 = \underset{(C_1)}{\int_O^{P_1}} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \underset{(C_2)}{\int_{P_1}^{P_2}} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 + \underset{(C_3)}{\int_{P_2}^{P_3}} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{l}_3 + \underset{(C_4)}{\int_{P_3}^{O}} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{l}_4$$

onde $O = O(0,0), P_1 = P_1(1,0)$, $P_2 = P_2(1,1)$ e $P_3 = P_3(0,1)$. Também, $d\mathbf{l}_1 = \mathbf{i}\ dx$, $d\mathbf{l}_2 = \mathbf{j}\ dy$, $d\mathbf{l}_3 = \mathbf{i}\ dx$ e $d\mathbf{l}_4 = \mathbf{j}\ dy$. Logo,

$$\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 = 10\ (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}) \cdot \mathbf{i}\ dx = 10y\ dx$$
$$\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = 10\ (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}\ dy = -10x\ dy$$
$$\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{l}_3 = 10\ (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}) \cdot \mathbf{i}\ dx = 10y\ dx$$
$$\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{l}_4 = 10\ (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}\ dy = -10x\ dy$$

(a) Portanto,

$$W_1 = \underset{(y=0)}{\int_0^1} 10y\ dx - \underset{(x=1)}{\int_0^1} 10x\ dy + \underset{(y=1)}{\int_1^0} 10y\ dx - \underset{(x=0)}{\int_1^0} 10x\ dy = 10xy|_{(0,0)}^{(1,0)} - 10xy|_{(1,0)}^{(1,1)} + 10xy|_{(1,1)}^{(0,1)} - 10xy|_{(0,1)}^{(0,0)}$$
$$= 10(1 \times 0 - 0 \times 0) - 10(1 \times 1 - 1 \times 0) + 10(0 \times 1 - 1 \times 1) - 10(0 \times 0 - 0 \times 1) = 0 - 10 - 10 + 0 = -20\mathrm{J}$$

(b) Fazendo o mesmo com $\mathbf{F}_2$

$$\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 = 10\ (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot \mathbf{i}\ dx = 10y\ dx$$
$$\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = 10\ (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}\ dy = 10x\ dy$$
$$\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{l}_3 = 10\ (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot \mathbf{i}\ dx = 10y\ dx$$
$$\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{l}_4 = 10\ (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}\ dy = 10x\ dy$$

$$W_2 = \underset{(y=0)}{\int_0^1} 10y\ dx + \underset{(x=1)}{\int_0^1} 10x\ dy + \underset{(y=1)}{\int_1^0} 10y\ dx + \underset{(x=0)}{\int_1^0} 10x\ dy = 10xy|_{(0,0)}^{(1,0)} + 10xy|_{(1,0)}^{(1,1)} + 10xy|_{(1,1)}^{(0,1)} + 10xy|_{(0,1)}^{(0,0)}$$
$$= 10(1 \times 0 - 0 \times 0) + 10(1 \times 1 - 1 \times 0) + 10(0 \times 1 - 1 \times 1) + 10(0 \times 0 - 0 \times 1) = 0 + 10 - 10 + 0 = 0$$

(c) $\mathbf{F}_1$ não é conservativa, mas $\mathbf{F}_2$ pode ser.

(d) Vamos admitir que $\mathbf{F}_2$ seja conservativa; logo, considerando $P_0 = P_0(0,0)$ e $P = P(x,y)$ encontra-se

$$U(x,y) = -\underset{(C)}{\int_{P_0}^{P}} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{l} = -\underset{(C)}{\int_{P_0}^{P}} 10\ (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy)$$

Como é uma força conservativa, o esta integral não deve depender do caminho C escolhido. Para facilitar, vamos considerar que C seja: $(0,0) \to (x,0) \to (x,y)$. Assim

$$U(x,y) = -\int_{\substack{P_0\\(C)}}^{P} 10\,(y\mathbf{i}+x\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}dx+\mathbf{j}dy) = -10\int_{\substack{0\\(y=0)}}^{x} ydx - 10\int_{\substack{0\\(x=x)}}^{y} xdy = -10xy$$

* * *

☐ **PROBLEMA 8** Uma particula está confinada a mover-se no semi-espaço $z \geq 0$, sob a ação de forças conservativas, de energia potencial $U(x,y,z) = F_0 z + \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$, onde F_0 e k são positivas. (a) Calcule as componentes da força que atua sobre a partícula. (b) Que tipo de força atua ao longo do eixo Oz? (c) Que tipo de forças atuam no plano xy? (d) Qual é a forma das superffcies equipotenciais?

▸ **Solução** De acordo com a definição $\mathbf{F} = -\nabla U$, temos

(a)

$$F_x = -\frac{d}{dx}\left(F_0 z + \frac{1}{2}k(x^2+y^2)\right) = -kx$$
$$F_y = -\frac{d}{dy}\left(F_0 z + \frac{1}{2}k(x^2+y^2)\right) = -ky$$
$$F_z = -\frac{d}{dz}\left(F_0 z + \frac{1}{2}k(x^2+y^2)\right) = -F_0$$

(b) Constante na direção negativa do eixo.

(c) Lei de Hooke; (d) $U(x,y,z) =$ constante $\Rightarrow$ Parabolóides de revolução com eixo ao longo de z.

☐ **PROBLEMA 9** Um oscilador harmônico tridimensional isotrópico é defínido como uma particula que se move sob a ação de forças associadas à energia potencial

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$$

onde k é uma constante positiva. Mostre que a força correspondente é uma força central, e calcule-a. De que tipo é a força obtida?

▸ **Solução** Da definição $\mathbf{F} = -\nabla U$, temos

$$F_x = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)\right) = -kx$$
$$F_y = -\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)\right) = -ky$$
$$F_z = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)\right) = -kz$$

de onde se obtém

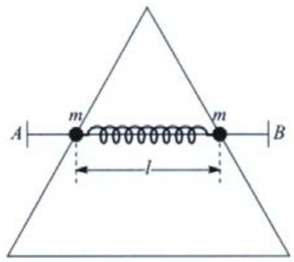
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = -k(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) = -k\mathbf{r} = -kr\,\hat{\mathbf{r}}.$$

que é a lei de Hooke dirigida para a origem.

* * *

☐ **PROBLEMA 10** Uma estrutura rígida triangular é construída com três hastes iguais e seu plano é vertical, com a base na horizontal. Nos dois outros lados estão enfiadas duas bolinhas idênticas de massa m, atravessadas por um arame rígido e leve AB, de modo que podem deslizar sobre as hastes com atrito desprezível, mantendo sempre o arame na horizontal. As duas bolinhas também estão ligadas por uma mola leve de constante elástica k e comprimento relaxado l_0. (a) Mostre que uma expressão para a energia potencial do sistema em função do comprimenlo l da mola é

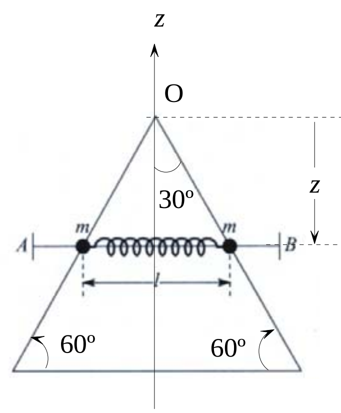
$U(l) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - mg\sqrt{3}\,l$. (b) Para que valor de l o sistema está em equilíbrio? (c) Se soltamos o sistema na situação em que a mola está relaxada, qual é o menor e qual é o maior valor de l no movimento subseqüente? (d) Que tipo de movimento o sistema realiza no caso (c)?



▸ **Solução** A energia potencial do sistema é devida às forças gravitacional e elástica. Assim, como $l - l_0$ é a deformação da mola,

$$U = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - 2mgz$$

onde o nível zero é tomado no vértice O do triângulo (figura).



A altura z pode ser calculada em função de l, através das relações geométricas num triângulo retângulo (ver figura). Ou seja,

$$z\,\mathrm{tg}\,30º = \frac{l}{2} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{2}l.$$

Assim,

$$U = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - 2mgz \Rightarrow U(l) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - mg\sqrt{3}\,l$$

(b) O sistema estará em equilíbrio para o valor de l que corresponde a um extremo de $U(l)$. Assim, derivando $U(l)$ em relação a l e igualando o resultado a zero, obtém-se para l o valor:

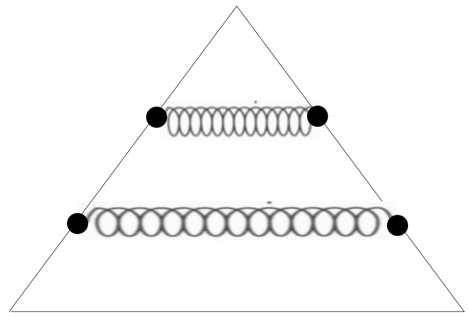
$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - mg\sqrt{3}\,l\right) = kl - kl_0 - mg\sqrt{3} = 0 \Rightarrow l = k + \frac{mg\sqrt{3}}{k}$$

(c) Na situação inicial o sistema só tem energia potencial gravitacional,

$$E = -2mgz_0 = -mg\sqrt{3}\,l_0$$

e numa situação arbitrária (z, l),

$$E = \frac{1}{2}(2m)v^2 - 2mgz + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = mv^2 - mg\sqrt{3}\,l + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$



Da conservação de energia

$$-mg\sqrt{3}\,l_0 = mv^2 - mg\sqrt{3}\,l + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

Fazendo $x = l - l_0$

$$\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - mg\sqrt{3}\,(l - l_0) + mv^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mg\sqrt{3}\,x + mv^2 = 0$$

Os valores máximo e mínimo de l se obtém para $v = 0$ (energia total igual à soma das energias potenciais) Logo,

$$\frac{1}{2}kx^2 - mg\sqrt{3}\,x = 0 \Rightarrow x = 0,\; x = 2mg\frac{\sqrt{3}}{k}$$

Portanto,

$$l = l_0 + x \Rightarrow l_{\min} = l_0, \quad l_{\max} = l_0 + \frac{2\sqrt{3}\,mg}{k}$$

* * *

☐ **PROBLEMA 11** Mostre que o trabalho necessário para remover um objeto da atração gravitacional da Terra é o mesmo que seria necessário para elevá-lo ao topo de uma montanha de altura igual ao raio da Terra, caso a força gravitacional permanecesse constante e igual ao seu valor na superfície da Terra, durante a escalada da montanha.

▸ **Solução** De acordo com a Eq. (7.5.7) $\Delta U = -mgR$ e portanto

$$W_{R\to\infty} = -\Delta U = mgR$$

Considerando que força gravitacional seja constante no trajeto até o topo da montanha, este trabalho, realizado por uma força externa para elevar o corpo até um altura R, pode ser calculado, fazendo $F = mg$ e

$$W = F(z - z_0) \Rightarrow mg(z - z_0)$$

Tomando o nível de referência $z = 0$ na superfície da Terra e $z = R$, encontra-se

$$W = mgR$$

* * *

☐ **PROBLEMA 12** Calcule a velocidade de escape de um corpo a partir da superfície da Lua.

▸ **Solução** De acordo com a Eq. (7.5.28)

$$T_e = mg_L R_L$$

onde

$$g_L = \frac{M_L G}{R_L^2}$$

Assim, como

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = mg_L R_L \Rightarrow v_{e,L} = \sqrt{2\frac{M_L G}{R_L}}$$

Usando os valores $\left(\rho_L = 3,34 \text{ g/cm}^3\right)$

$$\begin{cases} R_L = 1.738 \text{ km} = 1,738 \times 10^6 \text{ m} \\ M_L = \frac{4}{3}\pi R_L^3 \rho_L = \frac{4}{3} \times \pi \times 1,738^3 \times 10^{18} \times 3,34 \times 10^3 = 7,3 \times 10^{22} \text{ kg} \\ G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \times \text{m}^2/kg^2 \end{cases}$$

Logo,

$$v_{e,L} = \sqrt{2\frac{M_L G}{R_L}} \Rightarrow v_{e,L} = \sqrt{2\frac{7,3 \times 10^{22} \times 6,67 \times 10^{-11}}{1,738 \times 10^6}} = 2.367 \text{ m/s}$$

ou seja,

$$\blacktriangleright\ v_{e,L} = 2,4 \text{ km/s.}$$

* * *

☐ **PROBLEMA 13** Um satélite síncrono da Terra é um satélite cujo período de revolução em torno da Terra é de 24 h, de modo que permanece sempre acima do mesmo ponto da superfície da Terra. (a) Para uma órbita circular, a que distância do centro da Terra (em km e em raios da Terra) precisa ser colocado um satélite para que seja síncrono? (b) Que velocidade mínima seria preciso comunicar a um corpo na superficie da Terra para que atingisse essa órbita (desprezando os efeitos da atmosfera)?

▸ **Solução** **(a)** Para que o período seja $T = 24$ h implica

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow v_S = \omega R_s$$

onde R_s é o raio da órbita circular. De acordo com a segunda lei de Newton,

$$\frac{GMm}{R_s^2} = \frac{mv_s^2}{R_s} \Rightarrow \frac{GMm}{R_s^2} = \frac{m\omega^2 R_s^2}{R_s} \Rightarrow R_S = \left(\frac{GMm}{m\omega^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}$$

Assim, para $M = 5,97 \times 10^{24}$ kg e $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.27 \times 10^{-5}$rad/s e $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N×m$^2/kg^2$

$$R_S = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} \Rightarrow R_S = \left(\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{(7.27 \times 10^{-5})^2}\right)^{1/3} = 4.22 \times 10^7 \text{ m}$$

Ou seja,

$$R_S = 4,22 \times 10^4 \text{ km.}$$

Em termos de raios da Terra, será $\left(R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}\right)$

$$R_s = \frac{4.22 \times 10^4}{6.37 \times 10^3} R_T = 6,6 R_T$$

(b) Como a velocidade na órbita é $v_S = \omega R_S = 7.27 \times 10^{-5} \times 4.22 \times 10^7 = 3.068$ m/s e sua energia potencial é dada por

$$U(r) = -\frac{GmM}{r}$$

então, a energia mecânica total do satélite nesta órbita é

$$E = \frac{1}{2} m v_S^2 + U(R_S)$$

A energia total na superfície da Terra é

$$E = \frac{1}{2} m v_T^2 + U(R_T)$$

Da conservação da energia mecânica, tem-se

$$\frac{1}{2} m v_T^2 + U(R_T) = \frac{1}{2} m v_S^2 + U(R_S) \Rightarrow \frac{1}{2} m v_T^2 - \frac{GmM}{R_T} = \frac{1}{2} m v_S^2 - \frac{GmM}{R_S}$$

ou seja,

$$v_T^2 = v_S^2 + 2GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_S}\right) \Rightarrow v_T = \sqrt{v_S^2 + GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_S}\right)}$$

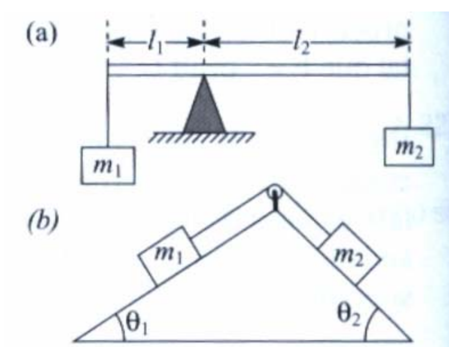
ou

$$v_T = \sqrt{3068^2 + 6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24} \times 2 \times \left(\frac{1}{6.37 \times 10^6} - \frac{1}{4.22 \times 10^7}\right)} = 10.750 \text{ m/s}$$

$$v_T = 10,8 \text{ km/s.}$$

* * *

☐ **PROBLEMA 14** Utilize o Princípio dos Trabalhos Virtuais enunciado na Seç. 7.3 para obter as condições de equilíbrio da alavanca [Fig. (a)] e do plano inclinado [Fig. (b)]. Para isto, imagine que um pequeno deslocamento, compatível com os vínculos a que estão sujeitas, é dado às massas, e imponha a condição de que o trabalho realizado nesse deslocamento (trabalho virtual) deve ser nulo.



▸ **Solução** De acordo com a definição, para o caso (a) tem-se para o trabalho realizado

$$m_1 g \Delta z_1 = m_2 g \Delta z_2$$

Para deslocamentos infinitésimos Δz, este se confunde com o arco descrito por l_1 e l_2, sendo proporcionais ao ângulo $\Delta\theta$. Assim, $\Delta z_1 = l_1 \Delta\theta$ e $\Delta z_2 = l_2 \Delta\theta$ e então

$$m_1 g l_1 \Delta\theta = m_2 g l_2 \Delta\theta \Rightarrow m_1 l_1 = m_2 l_2.$$

Para o caso (b), o trabalho realizado pelos blocos 1 e 2 são

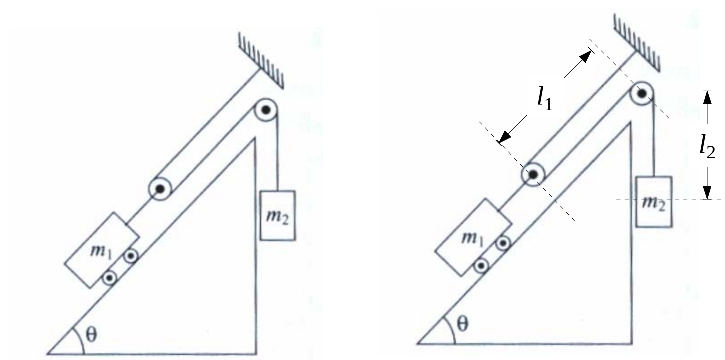
$$m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 \Delta l_1 = m_2 g \operatorname{sen}\theta_2 \Delta l_2$$

Como $\Delta l_1 = \Delta l_2$,

$$m_1 \operatorname{sen}\theta_1 = m_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

* * *

☐ **PROBLEMA 15** Um vagão de massa $m_1 = 4$ toneladas está sobre um plano inclinado de inclinação $\theta = 45°$, ligado a uma massa suspensa $m_2 = 500$ kg pelo sistema de cabo e polias ilustrado na Fig. Supõe-se que o cabo é inextensivel e que a massa do cabo e das polias é desprezível em confronto com as demais. O coeflciente de atrito cinético entre o vagão e o plano inclinado é $\mu_c = 0,5$ e o sistema é solto do repouso. (a) Determine as relações entre os deslocamentos s_1 e s_2 e as velocìdades v_1 e v_2 das massas m_1 e m_2, respectivamente. (b) Utilizando a conservação da energia, calcule de que distância o vagão se terá deslocado ao longo do plano inclinado quando sua velocidade atingir $4,5$ km/h



.

▸ **Solução** **(a)** A condição de fio inextensível é dada por $2l_1 + l_2 =$ constante. Disto resulta que os deslocamentos e velocidades das massas estão relacionadas de acordo com $2\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0 \Rightarrow \Delta l_2 = -2\Delta l_1$, ou seja,

$$|s_2| = 2|s_1| \text{ e } |v_2| = 2|v_1|.$$

(b) Como há atrito, a energia mecânica não se conserva. Mas sua variação é igual ao trabalho da força de atrito, ou seja,

$$W_a = E_f - E_i = \Delta E$$

Supondo que as coordenadas das massas sejam

$$z_{1i} = -l_1 \operatorname{sen}\theta,\ z_{1f} = -(l_1 + s_1)\operatorname{sen}\theta,\ v_{10} = 0,\ v_{1f} = v_1$$
$$z_{2i} = -l_2,\ \ z_{2f} = -(l_2 + s_2)\operatorname{sen}\theta,\ v_{20} = 0,\ v_{2f} = v_2$$

Assim,

$$E_i = \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + m_1 g z_{1i} + \frac{1}{2}m v_{2i}^2 + m_2 g z_{2i} \Rightarrow E_i = -m_1 g l_1 \operatorname{sen}\theta - m_2 g l_2$$

e

$$E_f = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + m_1 g z_{1f} + \frac{1}{2}m v_{2f}^2 + m_2 g z_{2f} \Rightarrow E_f = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - m_1 g(l_1 + s_1)\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - m_2 g(l_2 + s_2)$$

Como $v_2 = -2v_1 = -2v$ e $s_2 = -2s_1 = -2s$, encontra-se

$$E_f = \frac{1}{2}m_1v^2 - m_1g(l_1+s)\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}m_2(-2v)^2 - m_2g(l_2-2s)$$
$$E_f = \frac{1}{2}m_1v^2 - m_1g(\sin\theta)l_1 - m_1g(\sin\theta)s + 2m_2v^2 - m_2gl_2 + 2m_2gs$$

Logo,

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{2}m_1v^2 - m_1g(\sin\theta)l_1 - m_1g(\sin\theta)s + 2m_2v^2 - m_2gl_2 + 2m_2gs - (-m_1gl_1\sin\theta - m_2gl_2)$$
$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}m_1 + 2m_2\right)v^2 - m_1g(\sin\theta)s + 2m_2gs$$

Mas o trabalho realizado pela força de atrito é $(s_1 = s)$

$$W_a = F_cs = \left(\frac{1}{2}m_1 + 2m_2\right)v^2 - m_1g(\sin\theta)s + 2m_2gs$$

onde

$$F_c = -\mu_cm_1g\cos\theta$$

ou seja,

$$-\mu_cm_1g\cos\theta\, s = \left(\frac{1}{2}m_1 + 2m_2\right)v^2 - m_1g(\sin\theta)s + 2m_2gs$$

Resolvendo para s,

$$\left(m_1g\sin\theta - \mu_cm_1g\cos\theta\ - 2m_2g\right)s = \left(\frac{1}{2}m_1 + 2m_2\right)v^2 \Rightarrow s = \frac{(m_1+4m_2)v^2}{2\left(m_1g\sin\theta - \mu_cm_1g\cos\theta\ - 2m_2g\right)}$$

Logo, para $v = 4,5$ km/h $= 1,25$m/s

$$s = \frac{(4.000 + 4\times 500)\times 1,25^2}{2\left(4.000\times 9,8\sin 45^{\text{o}} - 0,5\times 4.000\times 9,8\times\cos 45^{\text{o}}\ - 2\times 500\times 988\right)} \Rightarrow \blacktriangleright s = 1,15 \text{ m}$$

que é o deslocamento da massa m_1.

* * *

☐ **PROBLEMA 16** Um automável de massa m e velocidade iniciai v_0 é acelerado utilizando a potência máxima P_M do motor durante um intervalo de tempo T. Calcule a velocidade do automóvel ao fim desse intervalo.

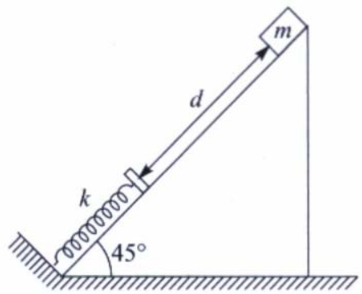
▸ **Solução** Como potência é defininida como trabalho por unidade de tempo, então

$$W = P_MT \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = P_MT \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}P_MT}$$

onde usamos o teorema $W-T$.

* * *

☐ **PROBLEMA 17** Um bloco de massa $m = 10$ kg é solto em repouso do alto de um plano inclinado de $45°$ em relação ao plano horizontal, com coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0,5$. Depois de percorrer uma dislância $d = 2$ m ao longo do plano, o bloco colide com uma mola de constante $k = 800$ N/m, de massa desprezível, que se encontrava relaxada. (a) Qual é a compressão sofrida pela mola? (b) Qual é a energia dissipada pelo atrito durante o trajeto do bloco desde o alto do plano até a compressão máxima da mola? Que fração representa da variação total de energia potencial durante o trajeto? (c) Se o coeficiente de atrito estático com o plano é $\mu_e = 0,8$, que acontece com o bloco logo após colidir com a mola?



▸ **Solução** **(a)** Tomando o nível zero na posição final da mola comprimida de s, podemos encontrar esta compressão usando a conservação da energia,

$$W_a = \Delta E$$

onde ΔE é a variação da energia mecânica. Sabendo que

$$s_i = 0,\ s_f = s,\ z_i = (d+s)\operatorname{sen}45^o,\ z_f = 0,\ v_i = v_f = 0$$

encontra-se

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2}mv_i^2 + mgz_i = mg(d+s)\operatorname{sen}45^o \\ E_f &= \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_f + \frac{1}{2}ks^2 = \frac{1}{2}ks^2 \\ W_a &= -\mu_c mg\cos 45^o\, s \end{aligned}$$

Logo,

$$-\mu_c mg\cos 45^o(d+s) = \frac{1}{2}ks^2 - mg(d+s)\operatorname{sen}45^o \Rightarrow \frac{1}{2}ks^2 - mg\operatorname{sen}45^o\, s + \mu_c mg\cos 45^o\, s + \mu_c mgd\cos 45^o - m$$

$$\frac{1}{2}ks^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}mg(1-\mu_c)s - \frac{\sqrt{2}}{2}mgd(1-\mu_c) = 0 \Rightarrow s^2 - \sqrt{2}\,\frac{mg}{k}(1-\mu_c)s - \sqrt{2}\,\frac{mg}{k}d(1-\mu_c) = 0$$

Substituindo os valores numéricos, encontra-se

$$s^2 - \sqrt{2}\,\frac{10\times 9.8}{800}\times(1-0.5)s - \sqrt{2}\,\frac{10\times 9.8}{800}\times 2\times(1-0.5) = 0$$

ou

$$s^2 - 8.6621\times 10^{-2}s - 0.17324 = 0$$

cujas soluções são

$$s = -0.38 \text{ e } s = 0.46$$

A solução negativa pode ser descartada, uma vez que s, como foi definida, é uma grandeza positiva. Logo, a compressão máxima da mola é

$$\blacktriangleright\ s = 0.46 \text{ m.}$$

(b) A energia dissipada pelo atrito é

$$|\Delta E| = |W_a| = \mu_c mg\cos 45^o(d+s) = 0.5\times 10\times 9.8\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times(2+0.46)$$

ou seja,

$$|\Delta E| = 85 \text{ J.}$$

Durante o trajeto, a variação total da energia potencial gravitacional é dada por

$$|\Delta U| = |-mg(d+s)\sin 45^{\circ}| = \left| -10 \times 9.8 \times (2+0.46) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = 170 \text{ J}$$

Assim

$$f = \frac{85}{170} = 0,5$$

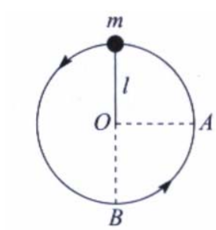
(c) Após o bloco parar, a força elástica da mola na compressão máxima se contrapôe à força de atrito e a resultante será

$$F = ks - \mu_e mg \operatorname{sen} 45^{\circ} = 800 \times 0.46 - 0.8 \times 10 \times 9.8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 312 \text{ N}$$

para cima ao longo do plano. Portanto, o bloco volta a subir.

* * *

☐ **PROBLEMA 18** Uma bolinha amarrada a um fio de comprimento $l = 1$ m gira num plano vertical. (a) Qual deve ser a velocidade da bolinha no ponto mais baixo B (Fig.) para que ela descreva o círculo completo? (b) A velocidade satisfazendo a esta condição, veriflca-se que a tensão do fio quando a bolinha passa por B difere por $4,41$ N da tensão quando ela passa pela posição horizontal A. Qual é a massa da bolinha?



▸ **Solução** **(a)** Tomando o nível zero no ponto B, a conservação da energia mecânica fornece

$$mgz_l + \frac{1}{2}mv_l^2 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Da segunda lei de Newton, no ponto mais alto

$$mg + T_l = \frac{mv_l^2}{l}$$

O menor valor de v_B para que a bolinha descreva uma volta completa, deve ser aquele que torne $T_l = 0$ no ponto mais alto. Assim,

$$mg = \frac{mv_l^2}{l} \Rightarrow v_l = \sqrt{gl}$$

Assim, substituindo na conservação da energia,

$$2mgl + \frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{5gl} \Rightarrow v_B = 7 \text{ m/s.}$$

(b) No ponto mais baixo B a tensão do fio vale

$$T_B - mg = \frac{mv_B^2}{l} \Rightarrow T_B = \frac{mv_B^2}{l} + mg = 5mg + mg = 6mg$$

A velocidade no ponto A , pode ser obtida pela conservação da energia energia mecânica.

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B \Rightarrow \frac{1}{2}v_A^2 + gl = \frac{5}{2}gl \Rightarrow v_A = \sqrt{5gl - 2gl} = \sqrt{3gl}$$

Então, a tensão do fio no ponto A vale

$$T_A = \frac{mv_A^2}{l} = \frac{3mgl}{l} = 3mg$$

Sabendo-se que $T_B - T_A = 4,41,$ então

$$6mg - 3mg = 4,41 \Rightarrow 3mg = 4,41 \Rightarrow m = \frac{4,41}{3g}$$

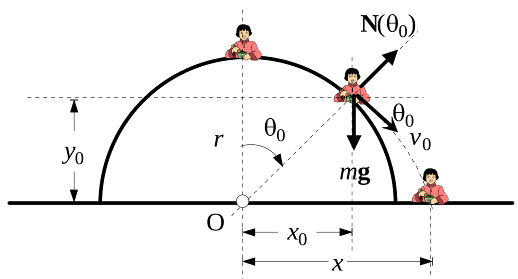
ou seja,

$$m = \frac{4.41}{3 \times 9.8} \Rightarrow \blacktriangleright m = 0.15 \text{ kg}$$

ou seja, $m = 150$ g.

* * *

☐ **PROBLEMA 19** Um garotinho esquimó desastrado escorrega do alto do seu iglu, um domo hemisférico de gelo de 3 m de altura. (a) De que altura acima do solo ele cai? (b) A que distância da parede do iglu ele cai?



▸ **Solução** **(a)** Numa posição qualquer, temos

$$mg\cos\theta - N(\theta) = \frac{mv(\theta)^2}{r} \Rightarrow N(\theta) = mg\cos\theta - \frac{mv(\theta)^2}{r}$$

Tomando o nível zero no solo, por conservação da energia mecânica obtém-se

$$mgr = mgr\cos\theta + \frac{1}{2}mv(\theta)^2$$

ou seja

$$v(\theta) = \sqrt{2gr(1 - \cos\theta)}$$

Então

$$N(\theta) = mg\cos\theta - \frac{2mgr(1-\cos\theta)}{r} = mg\cos\theta - 2mg + 2mg\cos\theta = 3mg\cos\theta - 2mg$$

O garoto perde o contato com o domo numa posição θ_0 para a qual $N(\theta_0) = 0.$ Logo,

$$3mg\cos\theta_0 - 2mg = 0 \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{2}{3}$$

ou seja, para $\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right).$ Também $\operatorname{sen}\theta_0 = \sqrt{1-\cos^2\theta_0} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$ Isto corresponde a uma altura y_0 igual a

$$y_0 = r\cos\theta_0 = 3 \times \frac{2}{3} = 2 \text{ m.}$$

Ou seja, o garoto cai de uma altura ▸$y_0 = 2$ m. A distância da origem x_0 que ele abandona o iglu é dada por

$$x_0 = r\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = r\frac{\sqrt{5}}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}\,\text{m} = 2{,}2 \text{ m}$$

(b) Ao abandonar o domo, o garoto o faz com uma velocidade

$$v_0 = v(\theta_0) = \sqrt{2gr(1-\cos\theta_0)} = \sqrt{2 \times g \times 3 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}g} = 4{,}43 \text{ m/s}$$

que faz um ângulo θ_0 abaixo da horizontal. A partir deste ponto o garoto descreve uma trajetória parabólica (movimento de projétil), cujas equações são (considerando a origem do sistema de coordenadas no ponto O)

$$x = x_0 + v_0\cos\theta_0 t, \qquad y = y_0 - v_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Assim, quando $y = 0$

$$0 = 2 - \sqrt{\frac{2}{3}g}\,\frac{\sqrt{5}}{3}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}gt^2 + \sqrt{\frac{10}{27}g}\,t - 2 = 0$$

ou

$$t^2 + 2\sqrt{\frac{10}{27g}}\,t - \frac{4}{g} = 0$$

ou ainda

$$t^2 + 2\sqrt{\frac{10}{27 \times 9.8}}\,t - \frac{4}{9.8} = 0 \Rightarrow t^2 + 0.39\,t - 0.41 = 0 \Rightarrow t = 0{,}47; \text{ e } t = -0{,}86$$

Ou seja, a solução é $t = 0{,}47$ s, que é o tempo que o garoto leva para atingir o solo. Substituindo este valor de t na expressão de x, encontra-se

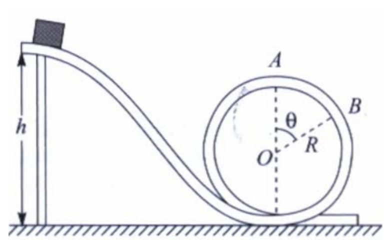
$$x = x_0 + v_0\cos\theta_0 t \Rightarrow x = \sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3} \times 9.8} \times 0.47 \Rightarrow x = 3{,}037 \text{ m}$$

Em relação à parede do iglu, a distância que o garoto atinge o solo é

$$d = x - r = 0{,}037 \text{ m}$$

* * *

☐ **PROBLEMA 20** Num parque de diversões, um carrinho desce de uma altura h para dar a volta no "loop" de raio R indicado na figura. (a) Desprezando o atrito do carrinho com o trilho, qual é o menor valor h_1 de h para permitir ao carrinho dar a volta toda? (b) Se $R < h < h_1$, o carrinho cai do trilho num ponto B, quando ainda falta percorrer mais um ângulo θ para chegar até o topo A (Fig). Calcule θ. (c) Que acontece com o carrinho para $h < R$?



▸ **Solução** **(a)** Tomando o nível zero de referência no solo, a conservação de energia fornece

$$mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$$

onde $h_A = 2R.$ Da 2ª lei de Newton no ponto A obtém-se

$$mg + N = \frac{mv_A^2}{R} \Rightarrow mv_A^2 = mgR + N.$$

Então, a menor velocidade para que o carrinho possa fazer o loop é aquela para a qual $N = 0.$ Assim,

$$mv_A^2 = mgR \Rightarrow v_A = \sqrt{gR}$$

Substituindo na equação de conservação da energia, encontra-se a menor altura $h = h_1$ para a qual é possível o carrinho dar uma volta completa,

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mgR + 2mgR \Rightarrow h_1 = \frac{R}{2} + 2R \Rightarrow \blacktriangleright h_1 = \frac{5}{2}R.$$

(b) Num ponto B qualquer, onde $R < h < h_1,$ a segunda lei de Newton fornece

$$N + mg\cos\theta = \frac{mv^2(\theta)}{R} \Rightarrow N(\theta) = \frac{mv^2(\theta)}{R} - mg\cos\theta$$

O carrinho cai do trilho num ponto onde ele perde o contato, ou seja, onde $N(\theta) = 0.$ Assim

$$\frac{mv^2(\theta)}{R} - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow Rg\cos\theta = v^2(\theta)$$

Mas, da conservação da energia mecânica sabe-se que

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgz(\theta)$$

onde $z(\theta) = R + R\cos\theta.$ Logo,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgR + mgR\cos\theta \Rightarrow v^2(\theta) = 2gh - 2gR - 2gR\cos\theta$$

Portanto,

$$Rg\cos\theta = v^2(\theta) \Rightarrow Rg\cos\theta = 2gh - 2gR - 2gR\cos\theta \Rightarrow 3R\cos\theta = 2(h - R)$$

ou

$$3R\cos\theta = 2(h - R)$$

de onde se obtém

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\left(\frac{h}{R} - 1\right)$$

(c) Para $h < R,$ a conservação da energia mecânica fornece

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2(\alpha) + mgR - mgR\cos\alpha$$

onde α é o ângulo medido com a vertical a partir do ponto mais baixo. Como por hipótese $v(\alpha) = 0,$ então

$$mgh = mgR - mgR\cos\alpha \Rightarrow R\cos\alpha = R - h$$

ou seja,

$$\cos\alpha = 1 - \frac{h}{R}$$

Assim, o carrinho sobe um ângulo α depois de ultrapassar o ponto mais baixo, volta a descer e continua oscilando.

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 21** Uma escada rolante liga um andar de uma loja com outro situado a $7,5$ m acima. O comprimento da escada é de 12 m e ela se move a $0,60$ m/s. (a) Qual deve ser a potência mínima do motor para transportar até 100 pessoas por minuto, sendo a massa média de 70 kg? (b) Um homem de 70 kg sobe a escada em 10 s. Que trabalho o motor realiza sobre ele? (c) Se o homem, chegando ao meio, põe-se a descer a escada, de tal forma a permanecer sempre no meio deÌa, isto requer que o motor realize trabalho? Em caso afirmativo, com que potência?

▸ **Solução** **(a)** O trabalho realizado pelo motor da escada para transportar uma única pessoa de massa $m = 70$ kg é dado por

$$W_1 = F\,d$$

onde, para uma velocidade constante, $F = mg\,\mathrm{sen}\,\theta,$ sendo $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{h}{d}.$ Assim

$$W_1 = mg \times \frac{h}{d} \times d \Rightarrow W_1 = mgh$$

ou seja,

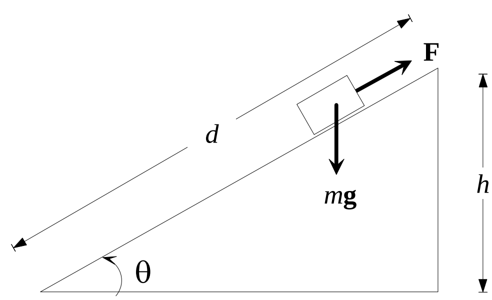
$$W_1 = 70 \times 9.8 \times 7.5 = 5,145 \text{ kJ}$$

A potência para transportar 100 pessoas por minuto, que corresponde a

$$N = \frac{100}{60} \text{ pessoas/s}$$

será

$$P_{100} = NW_1 = \frac{100}{60} \times 5,145 = 8,575 \text{ kW}$$



(b) O tempo que o motor gasta para transportar uma pessoa de um andar para o outro é

$$d = vt \Rightarrow t = \frac{12}{0.6} = 20 \text{ s}$$

A potência gasta para transportar uma pessoa será então

$$P_1 = \frac{W_1}{t} = \frac{5.145}{20} = 257,25 \text{ W}$$

Se um homem sobe a escada em $t = 10$ s, o motor realiza um trabalho sobre ele dado por

$$W = P_1 t = 257,25 \times 10$$

ou seja,

$$W = 2.572,5 \text{ J}$$