# CONSERVAÇÃO DO MOMENTO

*Atenção Leia o assunto no livro-texto e nas notas de aula e reproduza os problemas resolvidos aqui. Outros são deixados para v. treinar*

☐ **PROBLEMA 1** Dois veículos espaciais em órbita estão acoplados. A massa de um deles é de $1.000$ kg e a do outro $2.000$ kg. Para separá-los, é detonada entre os dois uma pequena carga explosiva, que comunica uma energia cinética total de $3.000$ J ao conjunto dos dois veículos, em relação ao centro de massa do sistema. A separação ocorre segundo a linha que une os centros de massa dos dois veículos. Com que velocidade relativa eles se separam um do outro?

▸ **Solução** Seja $m_1 = 1.000$ kg e $m_2 = 2.000$ kg. Em relação ao CM do sistema, o momento total é nulo. Assim,

$$m_1 v_1' = -m_2 v_2' \Rightarrow v_2' = -\frac{m_1}{m_2} v_1'$$

onde $v_1'$ e $v_2'$ são as velocidades ao longo da direção da linha que une os CM individuais dos dois veículos. Como a energia cinética total $T = 3000$ J comunicada pelo explosivo em relação ao CM do sistema

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(-\frac{m_1}{m_2} v_1'\right)^2 \Rightarrow 2T = \left(\frac{m_1^2 + m_1 m_2}{m_2}\right) v_1'^2$$

ou seja

$$\left(\frac{m_1^2 + m_1 m_2}{m_2}\right) v_1'^2 = 2T \Rightarrow v_1' = \sqrt{\frac{2 m_2 T}{m_1(m_1 + m_2)}} \Rightarrow v_1' = \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 10^3 \times 3 \times 10^3}{10^3(10^3 + 2 \times 10^3)}} = 2 \text{ m/s}$$

Como

$$v_2' = -\frac{m_1}{m_2} v_1' \Rightarrow v_2' = -\frac{10^3}{2 \times 10^3} \times 2 \Rightarrow v_2' = -1 \text{ m/s}$$

A velocidade relativa é $v_{12} = v_1' - v_2' = 2 + 1 = 3$ m/s.

∗ ∗ ∗

☐ **PROBLEMA 2** Um atirador, com um rifle de $2$ kg apoiado ao ombro, dispara uma bala de $15$ g, cuja velocidade na boca da arma (extremidade do cano) é de $800$ m/s. **(a)** Com que velocidade inicial a arma recua? **(b)** Que impulso transmite ao ombro do atirador? **(c)** Se o recuo é absorvido pelo ombro em $0,05$ s, qual é a força média exercida sobre ele, em N e em kgf?

▸ **Solução** **(a)** Como o sistema está inicialmente em repouso $\mathbf{P}_0 = 0$. Como é nula a resultante das forças externas, $\mathbf{F}^{(\text{ext})} = 0$, então o momento total se conserva, ou seja, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 = 0$. Portanto, imediatamente após o disparo $\mathbf{P} = m_r v_r + m_b v_b = 0 \Rightarrow v_r = -(m_b/m_r) v_b$ ▸ $v_r = -(15 \times 10^{-3}/2) \times 800 = -6.0$ m/s. Ou seja, a velocidade inicial de recuo do rifle é de $v_{0r} = 6$ m/s. **(b)** O impulso transmitido ao ombro do atirador corresponde à variação do momento do rifle após a arma ser dispara. Assim, $\Delta p_r = p_r - p_{0r} = m_r v_r - m_r v_{0r} = 0 - 2 \times (-6) = 12$ N s. **(c)** A força média é dada por $\bar{F} = \dfrac{\Delta p_r}{\Delta t} = \dfrac{12}{0.05} = 240$ N. Em kgf será $\bar{F} = 240/9.8 \approx 24.5$ kgf.

∗ ∗ ∗

☐ **PROBLEMA 3** Um canhão montado sobre uma carreta, apontado numa direção que forma um ângulo de $30^{\text{o}}$ com a horizontal, atira uma bala de $50$ kg, cuja velocidade na boca do canhão é de $300$ m/s. A massa total do canhão e da carreta é de $5$ toneladas. **(a)** Calcule a velocidade inicial de recuo da carreta. **(b)** Se o coeficiente de atrito cinético é $0,7$, de que distância a carreta recua?

▸ **Solução** Vamos considerar apenas a componente horizontal dos momentos, uma vez que a variação da componente vertical do momento da bala é absorvida pelo solo. Assim, como $\mathbf{F}^{(\text{ext})} = 0$ e inicialmente o sistema estava em repouso,

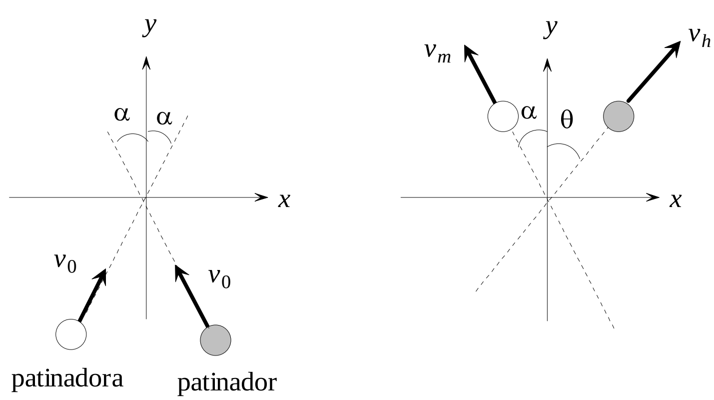
$$m_b v_b \cos 30^{\mathrm{o}} + m_c v_c = 0 \Rightarrow v_c = -\left(\frac{m_b}{m_c}\right) v_b \cos 30^{\mathrm{o}} \Rightarrow v_c = -\left(\frac{50}{5\times 10^3}\right) \times 300 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -2.6 \text{ m/s}$$

ou seja, a velocidade de recuo da carreta é $2{,}6$ m/s. **(b)** A força de atrito é $F_c = \mu_c N = 0.7 \times 5 \times 10^3 \times 9.8 = 34.300$ N, o que implica, pela 2ª lei de Newton, uma desaceleração da carreta dada por $a = \frac{F_c}{m_c} = \frac{34300}{5000} = 6.9$ m/s$^2$. Assim, considerando $v_{0c} = 2{,}6$ m/s, $v_c = 0$ e $a = 6.9$ m/s$^2$, a distância que a carreta recua é

$$v_c^2 = v_{0c}^2 - 2a\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v_{0c}^2}{2a} = \frac{2.6^2}{2\times 6.9} = 0.49 \text{ m.}$$

$* * *$

□ **PROBLEMA 4** Uma patinadora e um patinador estão-se aproximando um do outro, deslizando com atrito desprezível sobre uma pista de gelo, com velocidades de mesma magnitude, igual a $0{,}5$ m/s. Ela tem $50$ kg, carrega uma bola de $1$ kg e patina numa direção $10^{\mathrm{o}}$ a leste da direção norte. Ele tem $51$ kg, dirige-se para $10^{\mathrm{o}}$ a oeste da direção norte. Antes de colidirem, ela lança a bola para ele, que a apanha. Em conseqüência, passam a afastar-se um do outro. Ela se move agora com velocidade de $0{,}51$ m/s, numa direção $10^{\mathrm{o}}$ a oeste da direção norte. **(a)** Em que direção se move o patinador depois de apanhar a bola? **(b)** Com que velocidade? **(c)** Qual foi o momento transferido da patinadora para o patinador? **(d)** Com que velocidade e em que direção a bola foi lançada? [Note que a deflexão das trajetórias produzida pela troca da bola é análoga ao efeito de uma força repulsiva entre os dois patinadores. Na física das partículas elementares, a interação entre duas partículas é interpretada em termos de troca de uma terceira partícula entre elas].




▸ **Solução** Como $\mathbf{F}^{(\mathrm{ext})} = 0$, o momento total do sistema se conserva. Seja $\mathbf{P}_0$ o momento inicial. Logo $(\alpha = 10^{\mathrm{o}})$

$$P_{0x} = (m_m + m_b)v_{0m} \operatorname{sen}\alpha - m_h v_{0h} \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow P_{0x} = (m_m + m_b - m_h)v_0 \operatorname{sen}\alpha$$
$$P_{0y} = (m_m + m_b)v_{0m} \cos\alpha + m_h v_{0h} \cos\alpha \Rightarrow P_{0y} = (m_m + m_b + m_h)v_0 \cos\alpha$$

Após lançar a bola, o momento sua velocidade é de $v_m = 0{,}51$ m/s numa direção $\alpha = 10^{\mathrm{o}}$. Chamando de $\theta$ a direção do patinador, temos para as componentes do momento final

$$P_x = -m_m v_m \operatorname{sen}\alpha + (m_h + m_b)v_h \operatorname{sen}\theta$$
$$P_y = m_m v_m \cos\alpha + (m_h + m_b)v_h \cos\theta$$

A condição $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$ implica que as componentes destes vetores devam ser iguais. Por isto,

$$P_{0x} = P_x \Rightarrow (m_m + m_b - m_h)v_0 \operatorname{sen}\alpha = -m_m v_m \operatorname{sen}\alpha + (m_h + m_b)v_h \operatorname{sen}\theta$$
$$P_{0y} = P_y \Rightarrow (m_m + m_b + m_h)v_0 \cos\alpha = m_m v_m \cos\alpha + (m_h + m_b)v_h \cos\theta$$

ou

$$[(m_m + m_b - m_h)v_0 + m_m v_m] \operatorname{sen}\alpha = (m_h + m_b)v_h \operatorname{sen}\theta$$
$$[(m_m + m_b + m_h)v_0 - m_m v_m] \cos\alpha = (m_h + m_b)v_h \cos\theta$$

**(a)** Dividindo membro a membro estas equações, obtém-se:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{[(m_m + m_b - m_h)v_0 + m_m v_m]}{[(m_m + m_b + m_h)v_0 - m_m v_m]} \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \left[\frac{(50+1-51)\times 0.5 + 50 \times 0.51}{(50+1+51)\times 0.5 - 50\times 0.51}\right] \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \theta = \alpha$$

Depois de apanhar a bola, o patinador se move numa direção $\theta = 10^{\text{o}}$ a leste da direção norte. **(b)** Como $\theta = \alpha,$ tem-se

$$[(m_m + m_b - m_h)v_0 + m_m v_m] \operatorname{sen}\alpha = (m_h + m_b)v_h \operatorname{sen}\theta \Rightarrow v_h = \frac{(m_m + m_b - m_h)v_0 + m_m v_m}{(m_h + m_b)}$$

ou

$$v_h = \frac{(50+1-51)\times 0.5 + 50\times 0.51}{51+1} \Rightarrow v_h = 0.49 \text{ m/s.}$$

**(c)** Devido à conservação do momento,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \mathbf{p}_{0m} + \mathbf{p}_{0h} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p}_m + \mathbf{p}_h \end{aligned}\right\} \mathbf{p}_{0m} + \mathbf{p}_{0h} = \mathbf{p}_m + \mathbf{p}_h \Rightarrow \Delta\mathbf{p}_h = -\Delta\mathbf{p}_m$$

Assim, a variação do momento da patinadora é

$$\left.\begin{aligned} p_{0mx} &= (m_m + m_b)v_0 \operatorname{sen}\alpha \\ p_{mx} &= -m_m v_m \operatorname{sen}\alpha \end{aligned}\right\} \Delta p_{mx} = p_{mx} - p_{0mx} = -m_m v_m \operatorname{sen}\alpha - (m_m + m_b)v_0 \operatorname{sen}\alpha = -(m_m v_m + (m_m + m_b)v_0) \operatorname{sen}\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} p_{0my} &= (m_m + m_b)v_0 \operatorname{sen}\alpha \\ p_{my} &= m_m v_m \cos\alpha \end{aligned}\right\} \Delta p_{my} = p_{my} - p_{0my} = m_m v_m \cos\alpha - (m_m + m_b)v_0 \cos\alpha = (m_m v_m - (m_m + m_b)v_0) \cos\alpha$$

ou seja

$$\Delta p_{mx} = -8.86 \text{ kg} \cdot \text{m/s}, \ \Delta p_{my} = 0$$

Como $\Delta\mathbf{p}_h = -\Delta\mathbf{p}_m,$ logo

$$\Delta p_{hx} = -\Delta p_{mx} = 8.86 \text{ kg} \cdot \text{m/s}, \qquad \Delta p_{hy} = -\Delta p_{my} = 0$$

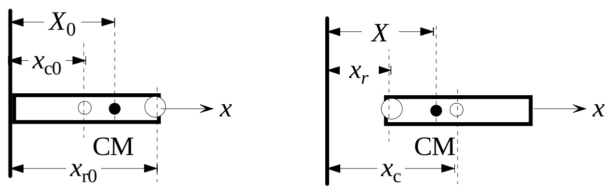
Portanto, o momento transferido foi de $8.86$ kg•m/s na direção leste. **(d)** Esta transferência de momento corresponde ao momento com que a bola foi lançada. Assim, como $\mathbf{p}_b = m_b \mathbf{v}_b = \Delta\mathbf{p}_h,$ temos

$$p_{bx} = m_b v_{bx} = \Delta p_{hx} \Rightarrow v_{bx} = \frac{\Delta p_{hx}}{m_b} = \frac{8.86}{1} = 8.86 \text{ m/s}$$
$$p_{by} = m_b v_{by} = \Delta p_{hy} \Rightarrow v_{by} = 0.$$

Logo, a bola foi lançada com uma velocidade de $8.86$ m/s de oeste para leste.

∗ ∗ ∗

☐ **PROBLEMA 5** Um remador de $75$ kg, sentado na popa de uma canoa de $150$ kg e $3$ m de comprimento, conseguiu trazê-la para uma posição em que está parada perpendicularmente à margem de um lago, que nesse ponto forma um barranco, com a proa encostada numa estaca onde o remador quer amarrar a canoa. Ele se levanta e caminha até a proa, o que leva a canoa a afastar-se da margem. Chegando à proa, ele consegue, esticando o braço, alcançar até uma distância de $80$ cm da proa. Conseguirá agarrar a estaca? Caso contrário, quanto falta? Considere o centro de massa da canoa como localizado em seu ponto médio e despreze a resistência da água.




▸ **Solução** A resultante das forças externas é nula, o que impede que o CM do sistema remador + canoa se desloque. Logo, a posição inicial do CM não varia. Considerando a origem do sistema na estaca, e que a canoa seja uma partícula de massa $m_c = 150$ kg localizada a uma distância $x_{c0} = 1.5$ m da estaca (CM da canoa) e o remador de massa $m_r = 75$ kg e $x_{r0} = 3$ m, então a localização inicial do CM do sistema em relação à estaca é

$$X_0 = \frac{m_r x_{r0} + m_c x_{c0}}{m_r + m_c} \Rightarrow X_0 = \frac{75 \times 3 + 150 \times 1.5}{75 + 150} = 2 \text{ m}$$

Como a posição do CM não varia, $X = X_0$ e $(M = m_r + m_c)$

$$X = \frac{m_r x_r + m_c x_c}{M} = X_0 \Rightarrow m_r x_r + m_c x_c = 2M$$

Por outro lado, na posição final vale a relação (ver figura)

$$x_c - x_r = \frac{l}{2} \Rightarrow x_c = x_r + \frac{l}{2}$$

onde $l$ é o comprimento da canoa. Assim,

$$m_r x_r + m_c x_c = 2M \Rightarrow m_r x_r + m_c \left( x_r + \frac{l}{2} \right) = 2M$$

de maneira que

$$(m_r + m_c) x_r = 2M - \frac{m_c l}{2} \Rightarrow x_r = \frac{4M - m_c l}{2(m_r + m_c)}$$

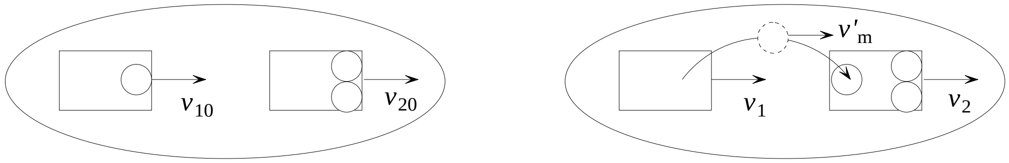
Logo, a posição final do remador em relação à estaca é

$$x_r = \frac{4(75 + 150) - 150 \times 3}{2(75 + 150)} = 1 \text{ m}$$

Como o remador só consegue esticar o braço até $0,80$m além da proa da canoa ele não conseguirá agarrar a estaca. Ainda faltam $20$ cm para conseguir.

$* * *$

☐ **PROBLEMA 6** No fundo de uma mina abandonada, o vilão, levando a mocinha como refém, é perseguido pelo mocinho. O vilão, de $70$ kg, leva a mocinha, de $50$ kg, dentro de um carrinho de minério de $540$ kg, que corre com atrito desprezível sobre um trilho horizontal, à velocidade de $10$ m/s. O mocinho, de $60$ kg, vem logo atrás, num carrinho idêntico, à mesma velocidade. Para salvar a mocinha, o mocinho pula de um carrinho para o outro, com uma velocidade de $6$ m/s em relação ao carrinho que deixa para trás. Calcule a velocidade de cada um dos carrinhos depois que o mocinho já atingiu o carrinho da frente.




▸ **Solução** O momento incial e final do sistema (considere apenas a direção $x$) são

$$P_0 = (m_m + m_c)v_{10} + (m_b + m_r + m_c)v_{20}$$
$$P = m_c v_1 + (m_b + m_r + m_c + m_m)v_2$$

Ao pular do carrinho $1$, o mocinho produz uma transferência de momento para o carrinho $2$. O salto, feito com velocidade $v'_m = 6$ m/s em relação ao carrinho, ou seja,

$$v_m = v'_m + v_{10} \Rightarrow v_m = 16 \text{ m/s}$$

em relação ao solo, produz uma variação de momento no carrinho $1$, que pode ser calculada usando a conservação de momento do carrinho $1$. Logo, a velocidade do carrinho após o salto do mocinho será:

$$(m_m + m_c)v_{10} = m_c v_1 + m_m v_m \Rightarrow v_1 = \frac{(m_m + m_c)v_{10} - m_m v_m}{m_c} \Rightarrow v_1 = \frac{(60 + 540) \times 10 - 60 \times 16}{540} = 9.3 \text{ m/s}$$

Da conservação do momento total, $P_0 = P$, encontra-se

$$(m_m + m_c)v_{10} + (m_b + m_r + m_c)v_{20} = m_c v_1 + (m_b + m_r + m_c + m_m)v_2$$

ou seja,

$$v_2 = \frac{(m_m + m_c)v_{10} + (m_b + m_r + m_c)v_{20} - m_c v_1}{m_b + m_r + m_c + m_m}$$

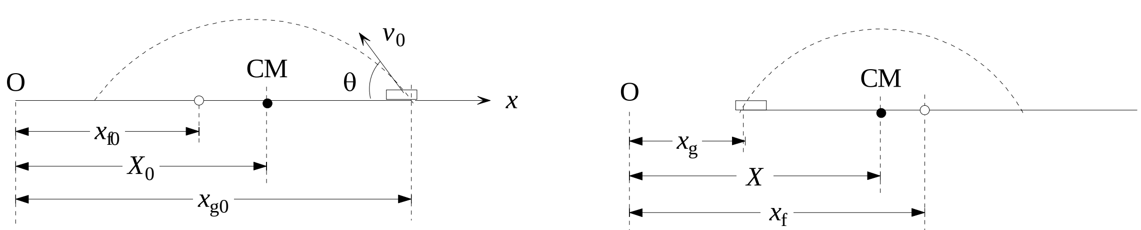
Substituindo os valores

$$v_2 = \frac{(60 + 540) \times 10 + (70 + 50 + 540) \times 10 - 540 \times 9.3}{70 + 50 + 540 + 60} = 10.5 \text{ m/s.}$$

Portanto, o carrinho de trás passa a ter uma velocidade de $9,3$ m/s e o da frente, $10,5$ m/s.

$* * *$

☐ **PROBLEMA 7** Um gafanhoto, pousado na beirada superior de uma folha de papel que está boiando sobre a água de um tanque, salta, com velocidade inicial de $4$ m/s, em direção à beirada inferior da folha, no sentido do comprimento. As massas do gafanhoto e da folha são de $1$ g e de $4$ g, respectivamente, e o comprimento da folha é de $30$ cm. Em que domínio de valores pode estar compreendido o ângulo $\theta$ entre a direção do salto e a sua projeção sobre a horizontal para que o gafanhoto volte a cair sobre a folha?




▸ **Solução** Vamos admitir que a água aborva a variação de momento na direção vertical. Então, na direção horizontal, a conservação de momento garante que o CM do sistema folha + gafanhoto não muda de posição, que inicialmente está em $X_0$, ou seja,

$$X_0 = \frac{m_g x_{g0} + m_f x_{f0}}{m_g + m_f} = \frac{1 \times 30 + 4 \times 15}{1 + 4} = 18 \text{ cm.}$$

Da conservação de momento, sabendo que $P_0 = 0$, e que o gafanhoto pula para a esquerda, obtém-se

$$P = -m_g v_0 \cos\theta + m_f v_f = 0 \Rightarrow v_f = \frac{m_g v_0 \cos\theta}{m_f} = \frac{1 \times 4 \times \cos\theta}{4} \Rightarrow v_f = \cos\theta$$

ou seja, a folha desloca-se para a direita. A velocidade relativa do ganhafoto em relação à folha é portanto

$$v'_g = v_g - v_f = -v_0 \cos\theta - \cos\theta = -5\cos\theta$$

na direção horizontal. Para percorrer o comprimento da folha, o gafanhoto leva então um tempo

$$t = \frac{l}{|v'_g|} = \frac{0.3}{5\cos\theta}$$

Em relação à origem do sistema ligado à água, no entanto, a posição do gafanhoto ao final deste intervalo de tempo é

$$x_g = x_{g0} - v_0 \cos\theta\, t \Rightarrow x_g = 0.3 - v_0 \cos\theta \times \frac{0.3}{5\cos\theta} = 0.3 - 4 \times \frac{0.3}{5} = 0.06 \text{ m}$$

Ou seja, o gafanhoto percorre $24$ cm para atingir a outra extremidade da folha que se desloca para a direita. Isto corresponde ao alcance máximo de um lançamento de projétil sob um ângulo $\theta$ como velocidade inicial $v_0 = 4$ m/s. Usando a expressão para o alcance,

$$A = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta \Rightarrow 0.24 = \frac{4^2}{9.8} \operatorname{sen}(2\theta) \Rightarrow \operatorname{sen}(2\theta) = \frac{0.24 \times 9.8}{16} = 0.147$$

ou seja,

$$2\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.147) \Rightarrow 2\theta = 8.5^{\circ} \Rightarrow \theta = 4.23^{\circ}$$

Portanto, para qualquer ângulo entre $0$ e $4,23^{\circ}$ o gafanhoto cai sobre o papel, ou seja,

$$0 < \theta < 4,23^{\circ}$$

Como o alcance é o mesmo para ângulos $\theta = 45^{\circ} + \alpha$ e $\theta = 45^{\circ} - \alpha$, então $\alpha = 45^{\circ} - \theta$ para este caso e portanto vale

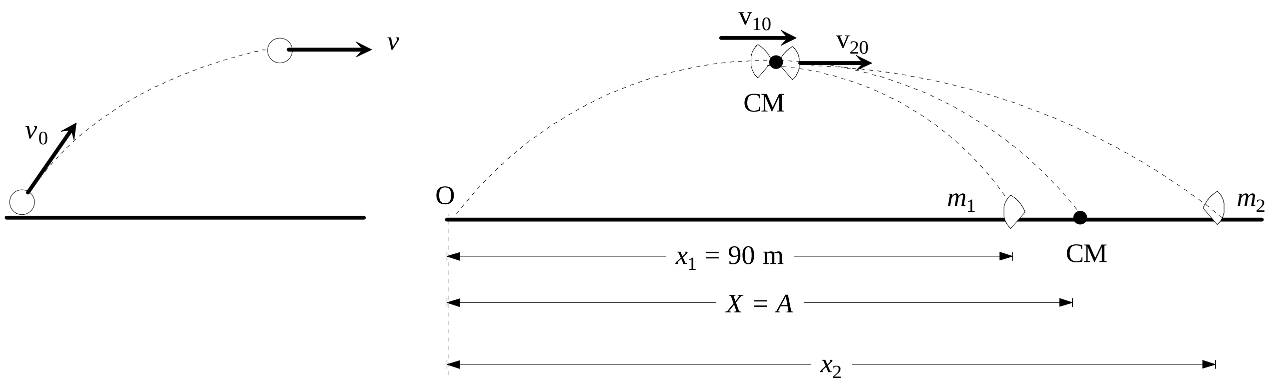
$$\alpha = 45^{\circ} - 4.23^{\circ} = 40,77^{\circ}$$

Portanto, $\theta = 45^{\circ} + 40.77^{\circ} = 85.77^{\circ}$ também satisfaz a condição para o alcance. Logo, outro domínio de valores será

$$85,77^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$$

∗ ∗ ∗

☐ **PROBLEMA 8** Um rojão, lançado segundo um ângulo de $45^{\circ}$, explode em dois fragmentos ao atingir sua altura máxima, de $25$ m; os fragmentos são lançados horizontalmente. Um deles, de massa igual a $100$ g, cai no mesmo plano vertical da trajetória inicial, a $90$ m de distância do ponto de lançamento. O outro fragmento tem massa igual a $50$ g. **(a)** A que distância do ponto de lançamento cai o fragmento mais leve? **(b)** Quais são as velocidades comunicadas aos dois fragmentos em conseqüência da explosão? **(c)** Qual é a energia mecânica liberada pela explosão?




▸ **Solução** **(a)** Para este lançamento, a velocidade inicial é dada através da expressão da altura máxima

$$y_m = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2gy_m}{\operatorname{sen}^2\theta}}$$

ou seja ($\theta = 45^o$)

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 25}{\left(\sqrt{2}/2\right)^2}} = 31.3 \text{ m/s.}$$

: $31.305$ Para esta velocidade, a distância horizontal até a posição de $y_m$ é $x_m = \frac{1}{2}A$. Como

$$A = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{2 \times 9.8 \times 25}{\left(\sqrt{2}/2\right)^2 \times 9.8} \times 1 = 100 \text{ m}$$

portanto,

$$x_m = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\frac{31.3^2}{9.9} \Rightarrow x_m = 50 \text{ m.}$$

**Momento antes da explosão** No ponto $y_m$, a velocidade do rojão (antes de explodir) vale apenas a componente $x$ da velocidade inicial, ou seja,

$$v = v_0 \cos 45^o$$

então, o momento total $\mathbf{P}_0$ vale

$$P_0 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow P_0 = (m_1 + m_2)v_0 \cos 45^o$$

**Momento após a explosão** Após a explosão, o momento é

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Como foi dada a posição em que fragmento $m_1$ caiu, que é $x_1 = 90$ m, podemos calcular a velocidade $v_1$ após a explosão. Ou seja, $(x_0 = x_m, y_0 = y_m, v_{0y} = 0, v_{0x} = v_1)$

$$x = x_m + v_1 t, \quad y = y_m - \frac{1}{2}gt^2$$

Para $y = 0,\ t = t_q$ que é o tempo de queda do fragmento $1$ . Portanto,

$$t = \sqrt{\frac{2y_m}{g}} \Rightarrow t_q = \sqrt{\frac{2 \times 25}{9.8}} = 2.26 \text{ s.}$$

Assim, para $t = t_q \Rightarrow x = x_1$

$$x_1 = x_m + v_1 t_q \Rightarrow v_1 = \frac{x_1 - x_m}{t_q} \Rightarrow v_1 = \frac{90 - 50}{2.26} = 17.7 \text{ m/s.}$$

**Conservação do momento** Como não há força externa na direção horizontal, podemos usar a conservação do momento

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_0 \cos 45^\circ$$

e o valor da velocidade do fragmento $m_2$ logo após a explosão é

$$v_2 = \frac{(m_1 + m_2) v_0 \cos 45^\circ - m_1 v_1}{m_2}$$

ou

$$v_2 = \frac{(0.100 + 0.050) \times 31.3 \times \sqrt{2}/2 - 0.100 \times 17.7}{0.050} = 31 \text{ m/s}$$

**Distância da queda do fragmento 2** Como o tempo de queda é o mesmo que o anterior, a posição do fragmento $2$ pode ser calculada por

$$x_2 = x_m + v_2 t_q$$

ou

$$x_2 = 50 + 31 \times 2.26 = 120 \text{ m}$$

**(b) Velocidade comunicada aos dois fragmentos** Antes da explosão, os fragmentos viajavam com uma velocidade

$$v = v_0 \cos 45^\circ \Rightarrow v = 31.3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 22.13 \text{ m/s}$$

Após a explosão, o fragmento de massa $m_1 = 100$ g passou a se movimentar com um velocidade $v_1 = 17.7$ m/s, ou seja, foi-lhe comunicada uma velocidade $v_1' = v_1 - v = 17.7 - 22.13 = -4.43$ m/s. Ao fragmento de massa $m_2 = 50$ g, cuja velocidade após a explosão é de $v_2 = 31$ m/s, foi-lhe comunicada uma velocidade $v_2' = v_2 - v = 31 - 22.13 = 8.87$ m/s.

**(c)** A energia mecânica liberada pela explosão pode ser calculada pela diferença da energia mecânica antes e depois da explosão. Assim,

$$E_a = \frac{1}{2} m v^2 + mgh = \frac{1}{2} \times (0.100 + 0.050) \times 22.13^2 + (0.100 + 0.050) \times 9.8 \times 25 = 73.48 \text{ J}$$

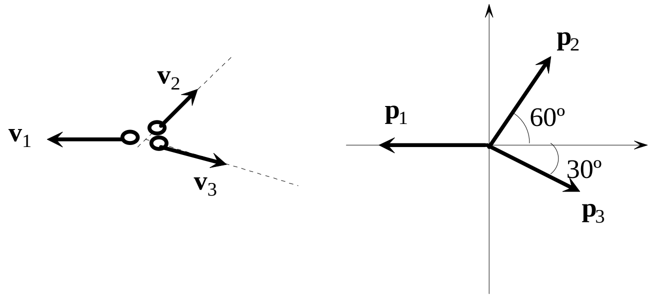
$$E_d = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_1 gh + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 gh = \frac{1}{2} \times 0.100 \times 17.7^2 + 0.100 \times 9.8 \times 25 + \frac{1}{2} \times 0.050 \times 31^2 + 0.050 \times 9.8 \times 25 = 76.44 \text{ J}$$

Portanto, a energia liberada foi de

$$\Delta E = E_d - E_a = 76.44 - 73.48 = 2.96 \text{ J}$$

$$* * *$$

☐ **PROBLEMA 9** Uma mina explode em três fragmentos, de $100$ g cada um, que se deslocam num plano horizontal: um deles para oeste e os outros dois em direções $60°$ ao norte e $30°$ ao sul da direção leste, respectivamente. A energia cinética total liberada pela explosão é de $4.000$ J. Ache as velocidades iniciais dos três fragmentos.




▸ **Solução** O momento inicial da mina é nulo, isto é, $\mathbf{P}_0 = 0.$ Não havendo forças externas, o momento final também o é. Logo,

$$P_x = -p_1 + p_2 \cos 60º + p_3 \cos 30º = 0$$
$$P_x = p_2 \,\mathrm{sen}\, 60º - p_3 \,\mathrm{sen}\, 30º = 0$$

Ou seja,

$$p_1 = p_2 \cos 60º + p_3 \cos 30º \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2} p_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} p_3$$
$$p_3 = \frac{p_2 \,\mathrm{sen}\, 60º}{\mathrm{sen}\, 30º} \Rightarrow p_3 = \sqrt{3}\, p_2$$

Substituindo $p_3$ na primeira, encontra-se

$$p_1 = \frac{1}{2} p_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{3}\, p_2 \Rightarrow p_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) p_2 \Rightarrow p_1 = 2 p_2$$

Como as massas dos fragmentos são iguais, isto é, $m_1 = m_2 = m_3 = m,$ podemos encontrar duas relações para as velocidades. Isto é,

$$p_1 = 2 p_2 \Rightarrow v_1 = 2 v_2$$
$$p_3 = \sqrt{3}\, p_2 \Rightarrow v_3 = \sqrt{3}\, v_2$$

Sabendo-se que a energia cinética total liberada pela explosão é de $4.000$ J, temos entrão a terceira relação entre as velocidades, ou seja,

$$T = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \Rightarrow v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \frac{2T}{m}$$

Portanto $\left(m = 0.100 \text{ kg}\right)$,

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \frac{2T}{m} \Rightarrow (2 v_2)^2 + v_2^2 + \left(\sqrt{3}\, v_2\right)^2 = \frac{8000}{0.100}$$

ou

$$4 v_2^2 + v_2^2 + 3 v_2^2 = 8 \times 10^4$$

ou ainda

$$8 v_2^2 = 8 \times 10^4 \Rightarrow v_2 = 100 \text{ m/s.}$$

Usando as duas relações, encontra-se

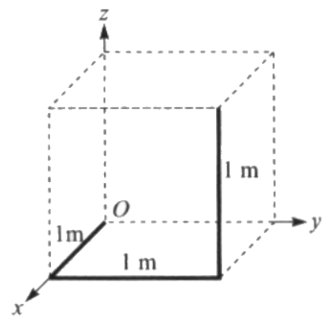
$$v_1 = 2 v_2 \Rightarrow v_1 = 200 \text{ m/s}$$
$$p_3 = \sqrt{3}\, p_2 \Rightarrow v_3 = 173 \text{ m/s}$$

Portanto,

$$v_1 = 200 \text{ m/s}, \quad v_2 = 100 \text{ m/s}, \quad v_3 = 173 \text{ m/s}$$

$* * *$

☐ **PROBLEMA 10** Uma barra cilíndrica homogênea de $3$ m de comprimento é dobrada duas vezes em ângulo reto, a intervalos de $1$ m de modo a formar três arestas consecutivas de um cubo (Fig.). Ache as coordenadas do centro de massa da barra, no sistema de coordenadas da figura.




▸ **Solução** Como a barra é homogênea, podemos considerar cada segmento da barra com uma partícula localizada no CM de cada um deles. Assim,

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad P_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right), \quad P_3 = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$$

Considerando que cada segmento tenha massa $m$, então

$$X = \frac{mx_1 + mx_2 + mx_3}{3m} = \frac{\frac{1}{2} + 1 + 1}{3} = \frac{5}{6} \text{ m}$$

$$Y = \frac{my_1 + my_2 + my_3}{3m} = \frac{0 + \frac{1}{2} + 1}{3} = \frac{1}{2} \text{ m}$$

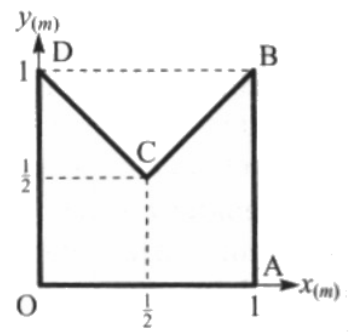
$$Z = \frac{mz_1 + mz_2 + mz_3}{3m} = \frac{0 + 0 + \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6} \text{ m}$$

Assim,

$$CM = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) \text{ em m}$$

$* * *$

☐ **PROBLEMA 11** **(a)** Ache as coordenadas do CM (centro de massa) da placa homogênea *OABCD* indicada na figura, dividindo-a em três triângulos iguais. **(b)** Mostre que se obtém o mesmo resultado calculando o CM do sistema formado pelo quadrado *OABD* e pelo triângulo *BCD* que dele foi removido, atribuindo massa negativa ao triângulo.




▸ **Solução** **(a)** Sejam os triângulos iguais $T_1 = OCD,\ T_2 = OCA$ e $T_3 = ACB.$ O CM de cada triângulo está no centro geométrico correspondente. Assim,

$$T_1 = \left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$$
$$T_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$$
$$T_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

Como as massas são iguais

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}}{3} = \frac{1}{2}$$
$$Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{7}{18}$$

ou seja,

$$CM = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{18}\right)$$

**(b)** O CM do quadrado é

$$X_q = \frac{1}{2}, \quad Y_q = \frac{1}{2}$$

e do triângulo

$$X_t = \frac{1}{2}, \ \ Y_t = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

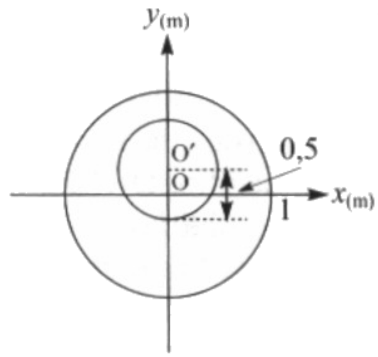
O CM do sistema, será então ($m_t = -m$)

$$X = \frac{m_q X_q + m_t X_t}{m_q + m_t} = \frac{4m \times \frac{1}{2} - m \times \frac{1}{2}}{4m - m} = \frac{1}{2}$$
$$Y = \frac{m_q Y_q + m_t Y_t}{m_q + m_t} = \frac{4m \times \frac{1}{2} - m \times \frac{5}{6}}{4m - m} = \frac{7}{18}$$

o que confirma o enunciado.

$* * *$

☐ **PROBLEMA 12** Calcule as coordenadas do CM da placa homogênea indicada na figura, um círculo de $1,0$ m de raio do qual foi removido um círculo de $0,5$ m de raio, com uma separação de $0,25$ m entre os centros $O$ e $O'$ dos dois círculos.




▸ **Solução** Vamos adotar o esquema de solução com massa negativa. Assim, o círculo maior, de área $A_1 = \pi$ e o círculo menor, de massa negativa, de área $A_2 = \frac{\pi}{4}$. Assim, como $A_1 = 4A_2 \Rightarrow m_1 = 4m_2$. Vamos adotar $m_2 = -m$ e $m_1 = 4m$. O CM do círculo 1 é $C_1 = (0,0)$, enquanto que do círculo 2, $C_2 = \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Logo, para o sistema teremos

$$X = \frac{m_1X_1 + m_2X_2}{m_1 + m_2} = \frac{4m \times 0 - m \times 0}{4m - m} = 0$$

$$Y = \frac{m_1Y_1 + m_2Y_2}{m_1 + m_2} = \frac{4m \times 0 - m \times \frac{1}{4}}{4m - m} = -\frac{1}{12}$$

Portanto, o CM do sistema está em $CM = \left(0, -\frac{1}{12}\right)$ em m.

☐ **PROBLEMA 13** Num lançamento do foguete Saturno V (veja tabela da pg. 164) são queimadas $2.100$ toneladas de combustível em $2,5$ min, gerando um empuxo de $3,4 \times 10^7$ N. A massa total do foguete com sua carga é de $2.800$ toneladas. **(a)** Calcule a velocidade de escape do combustível empregado. **(b)** Calcule a aceleração inicial do foguete na rampa de lançamento.

☐ **PROBLEMA 14** Utilizando os dados da tabela da pg. 164, calcule, para o $3$º estágio do sistema Saturno V - Apolo: **(a)** a velocidade de escape dos gases de combustão; **(b)** o incremento de velocidade produzido por este estágio, na ausência de forças externas. A diferença entre o resultado e os valores da tabela pode ser atribuída a essas forças (gravidade e resistência atmosférica residuais).

☐ **PROBLEMA 15** Um avião a jato viaja a $900$ km/h. Em cada segundo, penetram nos jatos $150$ m$^3$ de ar que, após a combustão, são ejetados com uma velocidade de $600$ m/s em relação ao avião. Tome a densidade do ar como $1,3$ kg/m$^3$. **(a)** Calcule o empuxo exercido sobre o avião em N e em kgf. **(b)** Calcule a potência dos jatos, em W e em hp.

☐ **PROBLEMA 16** Uma corrente de massa igual a $750$ g e $1,5$ m de comprimento está jogada no chão. Uma pessoa segura-a por uma das pontas e suspende-a verticalmente, com velocidade constante de $0,5$ m/s. **(a)** Calcule a razão entre a força exercida pela pessoa no instante final, em que está terminando de tirar a corrente do chão, e a força que teve de exercer no instante inicial. **(b)** Qual é o trabalho realizado?

☐ **PROBLEMA 17** Um encantador de serpentes, tocando sua flauta, faz uma serpente de comprimento $l$ e massa $m$, inicialmente enrodilhada no chão, elevar gradualmente a cabeça até uma altura $h < l$ do chão. Supondo a massa da serpente uniformemente distribuída pelo seu corpo, quanto trabalho foi realizado pela serpente?

☐ **PROBLEMA 18** Uma gotícula de água começa a formar-se e vai-se avolumando na atmosfera em torno de um núcleo de condensação, que é uma partícula de poeira, de raio desprezível. A gota cai através da atmosfera, que supomos saturada de vapor de água, e vai aumentando de volume continuamente pela condensação, que faz crescer a massa proporcionalmente à superfície da gota. A taxa $\lambda$ de crescimento da massa por unidade de tempo e de superfície da gota é constante. **(a)** Mostre que o raio $r$ da gota cresce linearmente com o tempo. **(b)** Mostre que a aceleração da gota, decorrido um tempo $t$ desde o instante em que ela começou a se formar, é dada por

$$\frac{dv}{dt} = -g - 3\frac{v}{t}$$

onde $v$ é a velocidade da gota no instante $t$ (desprezando o efeito da resistência do ar). **(c)** Mostre que esta equação pode ser resolvida tomando $v = at$, e determine a constante $a$. Que tipo de movimento resulta para a gota?

☐ **PROBLEMA 19** Um caminhão-tanque cheio de água, de massa total $M$, utilizado para limpar ruas com um jato de água, trafega por uma via horizontal, com coeficiente de atrito cinético $\mu_c$. Ao atingir uma velocidade $v_0$, o motorista coloca a marcha no ponto morto e liga o jato de água, que é enviada para trás com a velocidade $v_e$ relativa ao caminhão, com uma vazão de $\lambda$ litros por segundo. Ache a velocidade $v(t)$ do caminhão depois de um tempo $t$.

☐ **PROBLEMA 20** Uma nave espacial cilíndrica, de massa $M$ e comprimento $L$, está flutuando no espaço sideral. Seu centro de massa, que podemos tomar como o seu ponto médio, é adotado como origem $O$ das coordenadas, com $Ox$ ao longo do eixo do cilindro. **(a)** No instante $t = 0$, um astronauta dispara uma bala de revólver de massa $m$ e velocidade $v$ ao longo do eixo, da parede esquerda até a parede direita, onde fica encravada. Calcule a velocidade $V$ de recuo da nave espacial. Suponha que $m >> M$, de modo que $M \pm m \approx$ M. **(b)** Calcule o recuo total $\Delta X$ da nave, depois que a bala atingiu a parede direita. Exprima-o em função do momento $p$ transportado pela bala, eliminando da expressão a massa $m$. **(c)** Calcule o deslocamento $\Delta x$ do centro de massa do sistema devido à transferência da massa $m$ da extremidade esquerda para a extremidade direita da nave. **(d)** Mostre que $\Delta X + \Delta x = 0$, e explique por que este resultado tinha necessariamente de ser válido. **(e)** Suponha agora que o astronauta, em lugar de um revólver, dispara um canhão de luz laser. O pulso de radiação laser, de energia $E$, é absorvido na parede direita, convertendo-se em outras formas de energia (térmica, por exemplo). Sabe-se que a radiação eletromagnética, além de transportar energia $E$, também transporta momento $p$, relacionado com $E$ por: $p = E/c$, onde $c$ é a velocidade da luz. Exprima a resposta do item (b) em termos de $E$ e $c$, em lugar de $p$. **(f)** Utilizando os itens (c) e (d), conclua que a qualquer forma de energia $E$ deve estar associada uma massa inercial $m$, relacionada com $E$ por $E = mc^2$. Um argumento essencialmente idêntico a este, para ilustrar a inércia da energia, foi formulado por Einstein (veja Física Básica, vol. 4).

★ ★ ★