COLISÕES

Atenção Leia o assunto no livro-texto e nas notas de aula e reproduza os problemas resolvidos aqui. Outros são deixados para v. treinar

☐ **PROBLEMA 1** Calcule a magnitude (em kgf) da força impulsiva que atua em cada um dos exemplos seguintes: **(a)** Num saque de jogo de tênis, a bola, de massa igual a 60 g, é lançada com uma velocidade de 40 m/s; o tempo de contato com a raquete é da ordem de $0,005$ s **(b)** Um jogador de futebol cobra um pênalti, chutando a bola com uma velocidade de 20 m/s. A massa da bola é de 450 g e a duração do chute da ordem de $0,01$ s. **(c)** Uma pessoa de 80 kg pula do alto de um muro de $2,5$ m de altura, caindo em pé (sem dobrar os joelhos). A duração do impacto é de $0,01$ s. É melhor dobrar os joelhos! **(d)** Um carro de 1,5 toneladas, a 60 km/h, bate num muro. A duração do choque é de $0,1$ s.

▸ **Solução** A força impulsiva é dada por $\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$. Assim: **(a)** $p_0 = 0$ e $p = mv = 0.060 \times 40 = 2.4$ kg m/s. $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \dfrac{2.4 - 0}{0.005} = 480.0$ N ou $F = \dfrac{480}{9.8} = 49$ kgf . **(b)** $p_0 = 0$ e $p = mv = 0.450 \times 20 = 9.0$ kg m/s. $F = \dfrac{9 - 0}{0.01} = 900$ N ou $F = \dfrac{900}{9.8} = 92$ kgf. **(c)** Ao atingir o solo, a velocidade é $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 2.5} = 7.0$ m/s. Logo, $p_0 = 80 \times 7 = 560$ kg m/s e $p = 0$. $F = \dfrac{0 - 560}{0.01} = -56000$ N ou $F = \dfrac{56000}{9.8} = 5714$ kgf. **(d)** $v = \dfrac{60}{3.6} = 16.7$ m/s. $p_0 = 1500 \times 16.7 = 25050$ kg m/s e $p = 0$. $F = \dfrac{25050}{0.1} = 2.505 \times 10^5$ N ou $F = \dfrac{2.505 \times 10^5}{9.8} = 25.561$ kgf.

☐ **PROBLEMA 2** Na teoria corpuscular da luz, no século 17, imaginava-se um feixe de luz como constituído de corpúsculos muito pequenos, movendo-se com velocidade muito elevada. A reflexão da luz num espelho seria produzida pela colisão dos corpúsculos luminosos com o mesmo, de forma análoga a uma colisão elástica com uma parede impenetrável. Ao atravessar a superficie de separação entre dois meios transparentes distintos (ar e água, por exemplo). um corpúsculo luminoso teria sua velocidade alterada pelo efeito de uma força impulsiva normal à superficie de separação, prosseguindo depois em seu movimento, livre da ação de forças. Sejam θ_1, θ_1' e θ_2 os ângulos de incidência, reflexão, e refração respectivamente. Mostre que este modelo explicaria as leis da reflexão e da refração: raios refletido e refratado no plano de incidência, com $\theta_1' = \theta_1$, $\operatorname{sen}\theta_1'/\operatorname{sen}\theta_2 = n_{12}$, e calcule o índice de refração relativo n_{12} do segundo meio em relação ao primeiro em função das velocidades v_1 e v_2 dos corpúsculos nos meios 1 e 2. A velocidade dos corpúsculos seria maior no ar ou na água?

☐ **PROBLEMA 3** Considere a colisão elástica entre duas partículas de massas m_1 e m_2 que se movem em uma dimensão. **(a)** Verifique, a partir das (9.4.11), que a velocidade do CM se conserva na colisão. **(b)** Calcule as velocidades iniciais v_{1i}' e v_{2i}' das duas partículas em relação ao CM do sistema, exprimindo-as em função da velocidade relativa inicial v_{ri} da partícula 2 em relação à partícula 1 e da massa total $M = m_1 + m_2$. Qual é a relação entre v_{ri}' e v_{ri}? **(c)** Faça o mesmo para as velocidades finais v_{1f}' e v_{2f}' em relação ao CM, com auxilio das (9.4.11). Qual é a relação entre v_{rf}' e v_{rf} (a velocidade relativa final)? E entre v_{rf}' e v_{ri}'? **(d)** Interprete os resultados de (a) a (c), descrevendo como ocorre a colisão vista do referencial do CM.

▸ **Solução** **(a)** De acordo com a definição, a velocidade do CM antes e depois da colisão é dada por

$$V_i = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}, \quad V_f = \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1 + m_2}$$

A conservação da velocidade do CM implica em

$$\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1 + m_2}$$

Agora, considere as equações (9.4.11)

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i}$$
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

ou seja

$$m_1v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)m_1v_{1i} + \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}v_{2i}$$
$$m_2v_{2f} = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)m_2v_{2i}$$

ou ainda

$$p_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)p_{1i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}p_{2i}$$
$$p_{2f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}p_{1i} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)p_{2i}$$

Somando as duas

$$p_{1f} + p_{2f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)p_{1i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}p_{2i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}p_{1i} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)p_{2i}$$
$$p_{1f} + p_{2f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)p_{1i} + \left[\frac{2m_1}{m_1 + m_2}p_{2i} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\right]p_{2i}$$
$$p_{1f} + p_{2f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)p_{1i} + \left[\frac{2m_1}{m_1 + m_2} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\right]p_{2i}$$
$$p_{1f} + p_{2f} = \left(\frac{m_1 - m_2 + 2m_2}{m_1 + m_2}\right)p_{1i} + \left(\frac{2m_1 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\right)p_{2i}$$
$$p_{1f} + p_{2f} = p_{1i} + p_{2i}$$

Esta equação é equivalente a

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

ou, o que é o mesmo

$$\frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1v_{1f} + m_2v_{2f}}{m_1 + m_2}$$

como queríamos demonstrar. **(b)** Em relação ao CM o momento total é nulo, tanto antes como depois da colisão, ou seja

$$m_1v'_{1i} + m_2v'_{2i} = m_1v'_{1f} + m_2v'_{2f} = 0$$

Logo,

$$m_1v'_{1i} + m_2v'_{2i} = 0 \Rightarrow v'_{1i} = -\frac{m_2}{m_1}v'_{2i}$$

Como $v'_{2i} = v_{2i} - V_i$ encontra-se

$$v'_{2i} = v_{2i} - \left(\frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow v'_{2i} = \frac{m_1v_{2i} + m_2v_{2i} - m_1v_{1i} - m_2v_{2i}}{M} = \frac{m_1v_{2i} - m_1v_{1i}}{M} = \frac{m_1}{M}(v_{2i} - v_{1i})$$

Lembrando que a velocidade relativa inicial de 2 em relação a 1 é $v_{ri} = v_{2i} - v_{1i}$, então

$$v'_{2i} = \frac{m_1}{M}v_r$$

Portanto,

$$v'_{1i} = -\frac{m_2}{m_1}v'_{2i} \Rightarrow v'_{1i} = -\frac{m_2}{m_1}\frac{m_1}{M}v_r$$

ou seja,

$$\boxed{v'_{1i} = -\frac{m_2}{M} v_{ri}}$$

De maneira similar

$$\boxed{v'_{2i} = \frac{m_1}{M} v_{ri}}$$

Em relação ao centro de massa, $v'_{ri} = v'_{2i} - v'_{1i}$, ou seja,

$$v'_{ri} = \frac{m_1}{M} v_{ri} - \left(-\frac{m_2}{M} v_{ri}\right) = \frac{m_1 + m_2}{M} v_{ri}$$

ou seja,

$$v'_{ri} = v_{ri}.$$

(c) Para as velocidade finais, em relação ao CM temos da relação $m_1 v'_{1f} + m_2 v'_{2f} = 0$

$$v'_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} v'_{2f}$$

Como $v'_{2f} = v_{2f} - V_f$, então

$$v'_{2f} = v_{2f} - \left(\frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1}{M}(v_{2f} - v_{1f})$$

ou, lembrando que $v_{rf} = v_{2f} - v_{1f}$,

$$v'_{2f} = \frac{m_1}{M} v_{rf}$$

Então

$$v'_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} v'_{2f} \Rightarrow v'_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}\frac{m_1}{M} v_{rf} = -\frac{m_2}{M} v_{rf}$$

Devido à conservação da energia da energia cinética e do momento, vimos que

$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2f} - v_{1i}) \Rightarrow v_{rf} = -v_{ri}$$

ou seja, a velocidade relativa entre as duas partículas se inverte. Desta maneira, encontra-se

$$v'_{1f} = -\frac{m_2}{M} v_{rf} \Rightarrow v'_{1f} = \frac{m_2}{M} v_{ri}$$

Logo, como $v'_{1i} = -\frac{m_2}{M} v_{ri}$ encontra-se que

$$v'_{1f} = -v'_{1i}$$

De maneira similar

$$v'_{2f} = -v'_{21}$$

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 4** Considere um sistema qualquer de duas partículas, de massas m_1 e m_2 e velocidades v_1 e v_2. Sejam T_1 e T_2 as energias cinéticas das duas partículas, e $\mathbf{v}_r$, a velocidade relativa da partícula 2 em relação à partícula 1. **(a)** Mostre que os momentos das duas partículas em relação ao CM são dados por: $\mathbf{p}'_1 = -\mu \mathbf{v}_r = -\mathbf{p}'_2$, onde $\mu = m_1 m_2 / M$ (com $M = m_1 + m_2$) chama-se a massa reduzida do sistema de duas partículas. Note que $1/\mu = (1/m_1) + (1/m_2)$. **(b)** Mostre que a energia cinética total é dada por $T_1 + T_2 = T'_1 + T'_2 + \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{CM}^2$, onde T'_1 e T'_2 são as energias cinélicas relativas ao CM e $\mathbf{v}_{CM}$ é a velocidade do CM. **(c)** Mostre que a energia cinética relativa ao CM (energia cinética interna) é dada por $T'_1 + T'_2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}_r^2$. Combinando os resultados de (b) e (c), vemos que a energia cinética total é a soma da energia cinética associada ao movimento do CM, com massa igual à massa total, mais a energia cinética do movimento relativo, equivalente à de uma partícula de massa igual a massa reduzida e velocidade igual à velocidade relativa. Mostre que, para um sistema isolado de duas partículas, a energia cinética interna se conserva numa colisão elástica entre elas. Mostre que o fator Q de uma colisão inelástica (Seç. 9.7) é igual a variação da energia cinética interna.

▸ **Solução** O momento total em relação ao CM é nulo, ou seja,

$$\mathbf{P}' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0 \Rightarrow \mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2'$$

Como $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ ou $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \frac{m}{M}\mathbf{P}$ então

$$\mathbf{p}_1' = \mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{M}\mathbf{P}, \quad \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_2 - \frac{m_2}{M}\mathbf{P}$$

ou seja

$$\mathbf{p}_1' = \mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{M}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \Rightarrow \mathbf{p}_1' = \frac{M\mathbf{p}_1 - m_1(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\mathbf{p}_1 + m_2\mathbf{p}_1 - m_1\mathbf{p}_1 - m_1\mathbf{p}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\mathbf{p}_1 - m_1\mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{p}_1' = \frac{m_2 m_1 \mathbf{v}_1 - m_1 m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = -\mu(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = -\mu\mathbf{v}_r$$

Assim,

$$\mathbf{p}_1' = -\mu\mathbf{v}_r = -\mathbf{p}_2'$$

(b) A energia cinética total do sistema é dada por

$$T = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2}$$

Como $\mathbf{p}_1' = \mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{M}\mathbf{P}, \quad \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_2 - \frac{m_2}{M}\mathbf{P}$ ou seja,

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \frac{m_1}{M}\mathbf{P} \text{ e } \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2' + \frac{m_2}{M}\mathbf{P}$$

então

$$T = \frac{\left(\mathbf{p}_1' + \frac{m_1}{M}\mathbf{P}\right)^2}{2m_1} + \frac{\left(\mathbf{p}_2' + \frac{m_2}{M}\mathbf{P}\right)^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{p}_1'^2 + 2\frac{m_1}{M}\mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{P} + \frac{m_1^2}{M^2}\mathbf{P}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2'^2 + 2\frac{m_2}{M}\mathbf{p}_2' \cdot \mathbf{P} + \frac{m_2^2}{M^2}\mathbf{P}_2^2}{2m_2}$$

$$T = \frac{\mathbf{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{2\frac{m_1}{M}\mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{P}}{2m_1} + \frac{\frac{m_1^2}{M^2}\mathbf{P}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2'^2}{2m_2} + \frac{2\frac{m_1}{M}\mathbf{p}_2' \cdot \mathbf{P}}{2m_2} + \frac{\frac{m_2^2}{M^2}\mathbf{P}^2}{2m_2}$$

$$T = \frac{\mathbf{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2'^2}{2m_2} + \left(\frac{m_1 + m_2}{M}\right)\frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{2\frac{m_1}{M}\mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{P}}{2m_1} + \frac{2\frac{m_2}{M}\mathbf{p}_2' \cdot \mathbf{P}}{2m_2}$$

$$T = T_1' + T_2' + \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{P}}{M} + \frac{\mathbf{p}_2' \cdot \mathbf{P}}{M}$$

Mas, $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2'$, o que nos leva a

$$T = T_1' + T_2' + \frac{\mathbf{P}^2}{2M}$$

ou seja

$$T = T_1' + T_2' + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$$

(c) A energia cinética interna, $T' = T_1' + T_2'$ é dada por

$$T' = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2'^2$$

Mas, $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$, então

$$T' = \frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V})^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V})^2$$
$$T' = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 - m_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}m_1\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 - m_2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}m_2\mathbf{V}^2$$
$$T' = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 - (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\mathbf{V}^2$$

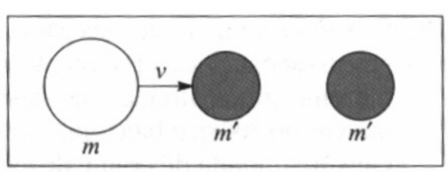
Como $\mathbf{V} = \dfrac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M}$, logo

$$T' = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 - (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) \cdot \left(\frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M}\right) + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M}\right)^2$$
$$T' = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 - \frac{(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)^2}{M} + \frac{1}{2}\frac{(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)^2}{M}$$
$$T' = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 - \frac{(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)^2}{2M}$$
$$T' = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)}v_1^2 - \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)}v_1v_2 - \frac{m_2^2}{2(m_1 + m_2)}v_2^2$$
$$T' = \frac{(m_1 + m_2)m_1v_1^2 + (m_1 + m_2)m_2v_2^2 - m_1^2v_1^2 - 2m_1m_2v_1v_2 - m_2^2v_2^2}{2(m_1 + m_2)}$$
$$T' = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$$
$$T' = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2$$

ou seja

$$T' = \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}_r^2$$

☐ **PROBLEMA 5** Uma partícula de massa m desloca-se com velocidade v em direção a duas outras idênticas, de massa m', alinhadas com ela, inicialmente separadas e em repouso (veja fig.). As colisões entre as partículas são todas elásticas. **(a)** Mostre que, para $m \leq m'$ haverá duas colisões, e calcule as velocidades finais das três partículas. **(b)** Mostre que, para $m > m'$, haverá três colisões, e calcule as velocidades finais das três partículas. **(c)** Verifique que, no caso (a), o resultado para a primeira e a terceira partícula é o mesmo que se a partícula intermediária não existisse.



▸ **Solução** Da conservação da energia cinética total e do momento total, sabe-se que

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i}$$
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

Como $v_{1i} = v$, $v_{2i} = 0$, $m_1 = m$ e $m_2 = m'$, encontra-se para as velocidades após a primeira colisão

$$v_{1f} = \left(\frac{m-m'}{m+m'}\right)v$$
$$v_{2f} = \left(\frac{2m}{m+m'}\right)v$$

(a) Se $m \leq m'$ a partícula de massa m pára ou volta após colidir com a segunda partícula de massa m'. Ou seja,

$$v_{1f}^{(1)} = \left(\frac{m-m'}{m+m'}\right)v \leq 0$$
$$v_{2f}^{(1)} = \frac{2mv}{m+m'} > 0$$

Como $v_{2f} > 0,$ a segunda partícula é arremessada ao encontro da terceira partícula que está em repouso. Novamente, da conservação da energia cinética e momento encontra-se $(v_{2i} = v_{2f}, v_{3i} = 0)$

$$v_{2f}^{(2)} = \left(\frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\right)v_{2i} + \frac{2m_3}{m_2+m_3}v_{3i}$$
$$v_{3f}^{(2)} = \frac{2m_2}{m_2+m_3}v_{2i} - \left(\frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\right)v_{3i}$$

ou seja,

$$v_{2f}^{(2)} = \left(\frac{m'-m'}{m'+m'}\right)v_{2i} + \frac{2m'}{m'+m'} \times 0$$
$$v_{3f}^{(2)} = \frac{2m'}{m'+m'}v_{2i} - \left(\frac{m'-m'}{m'+m'}\right) \times 0$$

Portanto,

$$v_{2f}^{(2)} = 0$$
$$v_{3f}^{(2)} = \frac{2m'}{m'+m'}v_{2i} = \frac{2mv}{m+m'}$$

Como $v_{1f}^{(1)} = \left(\frac{m-m'}{m+m'}\right)v \leq 0$ (a partícula volta após a colisão ou fica parada), $v_{2f}^{(2)} = 0$ e $v_{3f}^{(2)} = \frac{2mv}{m+m'} > 0$ não há mais condições de haver outras colisões, além das duas que mencionadas. **(b)** No caso em que $m > m'$ as velocidades após a primeira colisão (entre as partículas 1 e 2) são

$$v_{1f}^{(1)} = \left(\frac{m-m'}{m+m'}\right)v > 0$$
$$v_{2f}^{(1)} = \frac{2mv}{m+m'} > 0$$

A partícula 2 cuja velocidade $v_{2f} > 0$ caminha para colidir com a partícula $3.$ Após esta colisão, a velocidades finais são (ja foram calculada acima)

$$v_{2f}^{(2)} = 0$$
$$v_{3f}^{(2)} = \frac{2m'}{m'+m'}v_{2i} = \frac{2mv}{m+m'}$$

Mas neste caso, a partícula 1, após a primeira colisão, tem velocidade $v_{1f} > 0$ e volta a colidir com a partícula 2 que está parada após a segunda colisão. Como $v_{1i} = v_{1f}^{(1)} = \left(\frac{m-m'}{m+m'}\right)v$ e $v_{2i} = v_{2f}^{(2)} = 0$

$$v_{1f}^{(3)} = \left(\frac{m-m'}{m+m'}\right)v_{1i} + \frac{2m'}{m'+m'} \times 0$$
$$v_{2f}^{(3)} = \frac{2m}{m+m'}v_{1i} - \left(\frac{m-m'}{m'+m'}\right) \times 0$$

ou seja,

$$v_{1f}^{(3)} = \left(\frac{m-m'}{m+m'}\right)\left(\frac{m-m'}{m+m'}\right)v = \frac{(m-m')^2}{(m+m')^2}v$$
$$v_{2f}^{(3)} = \frac{2m}{m+m'}v_{1i} = \frac{2m}{m+m'}\left(\frac{m-m'}{m+m'}\right)v$$

Assim,

$$v_{1f} = \frac{(m-m')^2}{(m+m')^2}v > 0$$
$$v_{2f} = \frac{2m(m-m')}{(m+m')^2}v > 0$$
$$v_{3f} = \frac{2m}{m+m'}v > 0$$

Comparando as velocidades, encontra-se

$$\frac{v_{1f}}{v_{2f}} = \frac{\dfrac{(m-m')^2}{(m+m')^2}v}{\dfrac{2m(m-m')}{(m+m')^2}v} = \frac{1}{2}\frac{m-m'}{m} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{m'}{m}\right)$$

Como $m > m'$, $m'/m < 1$ e portanto:

$$v_{1f} < v_{2f}.$$

Por outro lado,

$$\frac{v_{2f}}{v_{3f}} = \frac{\dfrac{2m(m-m')}{(m+m')^2}v}{\dfrac{2m}{m+m'}v} = \frac{m-m'}{m+m'} < 1$$

e, portanto,

$$v_{2f} < v_{3f}$$

Logo,

$$v_{1f} < v_{2f} < v_{3f}.$$

Como todas as partículas caminham para a direita e suas velocidades satisfazem as desigualdades $v_{1f} < v_{2f} < v_{3f}$, concluímos que não haverá outras colisões, além das três já mencionadas.

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 6** **(a)** Que fração f da energia cinética é transferida por uma partícula de massa m, que se move com velocidade v, numa colisão frontal elástica com uma partícula de massa m' inicialmente em repouso? Exprima o resultado em função da razão $\lambda = m'/m$. Para que valor de λ a transferência é máxima, e quanto vale? **(b)** Coloca-se entre as duas partículas uma terceira, de massa m'', em repouso, alinhada com m e m'. Mostre que a transferência de energia cinética de m para m' é máxima quando $m'' = \sqrt{m\,m'}$. Mostre que, para $m \neq m'$, a presença da partícula intermediária possibilita transferir mais energia cinética de m para m' do que no caso (a).

▸ **Solução** Após a colisão, as velocidades são $\left(v_{1i} = v,\ v_{2i} = 0\right)$

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i} \qquad \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \left(\dfrac{m - m'}{m + m'}\right)v \\ v_{2f} = \dfrac{2m}{m + m'}v \end{cases}$$
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

Como a energia cinética inicial da partícula 1 é $T_{1i} = \frac{1}{2}mv^2$ e a final

$$T_{1f} = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{m - m'}{m + m'}\right)^2 v^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right)^2 v^2$$

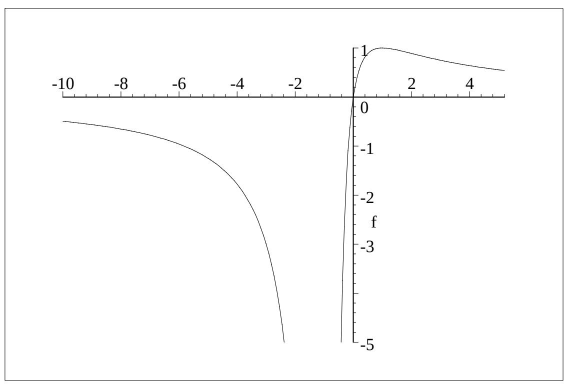
ou seja,

$$T_{1f} = \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right)^2 \frac{1}{2}mv^2 = \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right)^2 T_{1i}$$

Como $T_{1\to 2} = T_{1i} - T_{1f}$ é a energia cinética transferida para a partícula de massa m', a fração f é dada por

$$f = \frac{T_{1\to 2}}{T_{1i}} = \frac{T_{1i} - T_{1f}}{T_{1i}} = \frac{T_{1i} - \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right)^2 T_{1i}}{T_{1i}} = \frac{4\lambda}{(1 + \lambda)^2}$$

A representação gráfica da fração f em função de λ é dada por:



Vemos que tem um máximo entre 0 e $2.$ Para determinar o valor de λ para o qual $f = f_{\max}$

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\frac{4\lambda}{(1 + \lambda)^2} = 0$$

ou seja :

$$-4\frac{-1 + \lambda}{(1 + \lambda)^3} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Desta maneira

$$f_{\max} = \frac{4 \times 1}{(1 + 1)^2} = 1 \left(\text{para } \lambda = 1\right)$$

(b) Interpondo-se a massa m'' entre m e $m',$ a velocidades final da massa m' pode ser calculada a partir das equações:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_3}\right)v_{1i} + \frac{2m_3}{m_1 + m_3}v_{3i}$$
$$v_{3f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_3}v_{1i} - \left(\frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_3}\right)v_{3i}$$

Portanto, da colisão entre $m_1 = m$ e $m_3 = m'',$ encontra-se

$$v_{1f} = \left(\frac{m - m''}{m + m''}\right)v$$
$$v_{3f} = \frac{2m}{m + m''}v$$

A massa $m_3 = m''$ colide em seguida com $m_2 = m'$ que está em repouso. Como $v_{3i} = v_{3f}$, então

$$v_{2f} = \left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\right)v_{2i} + \frac{2m_3}{m_2 + m_3}v_{3i}$$
$$v_{3f} = \frac{2m_2}{m_2 + m_3}v_{2i} - \left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\right)v_{3i}$$

ou seja ($v_{2i} = 0$)

$$v_{2f} = \frac{2m''}{m' + m''}\frac{2m}{m_1 + m''}v$$
$$v_{3f} = \frac{2m'}{m' + m''} \times 0 - \left(\frac{m' - m''}{m' + m''}\right)\frac{2m}{m + m''}v$$

Logo,

$$v_{2f} = \frac{2m''}{m' + m''}\frac{2m}{m_1 + m''}v$$
$$v_{3f} = -\left(\frac{m' - m''}{m' + m''}\right)\frac{2m}{m + m''}v$$

A energia cinética transferida para a partícula 2 é

$$T_{1\to 2} = \frac{1}{2}m'v_{2f}^2 = \frac{1}{2}m'\left(\frac{2m''}{m' + m''}\frac{2m}{m + m''}v\right)^2$$

ou seja,

$$T_{1\to 2} = 8m'\frac{m''^2}{(m' + m'')^2}\frac{m^2}{(m + m'')^2}v^2 = 8m'\frac{m''^2}{(m' + m'')^2}\frac{m^2}{(m + m'')^2}\left(\frac{2}{m}\right)\frac{1}{2}mv^2$$
$$T_{1\to 2} = \frac{16m\, m'm''^2}{(m' + m'')^2(m + m'')^2}T_{1i}$$

Logo, a fração da energia transferida é

$$f = \frac{T_{1\to 2}}{T_{1i}} = \frac{16m\, m'm''^2}{(m' + m'')^2(m + m'')^2}$$

Derivando em relação a m'' e igualando a zero, encontra-se

$$\frac{d}{dm''}\frac{16m\, m'm''^2}{(m' + m'')^2(m + m'')^2} = 32m\, m'm''\left[\frac{m\, m' - m''^2}{(m' + m'')^3(m + m'')^3}\right] = 0$$

Daí obtém-se

$$m\, m' - m''^2 = 0 \Rightarrow m'' = \sqrt{mm'}$$

Portanto, o valor máximo de f é

$$f_{\max} = \frac{16m^2\, m'^2}{\left(m' + \sqrt{mm'}\right)^2\left(m + \sqrt{mm'}\right)^2}$$

Usando $\lambda = \frac{m'}{m}$ ou seja, $m' = \lambda m$, encontra-se

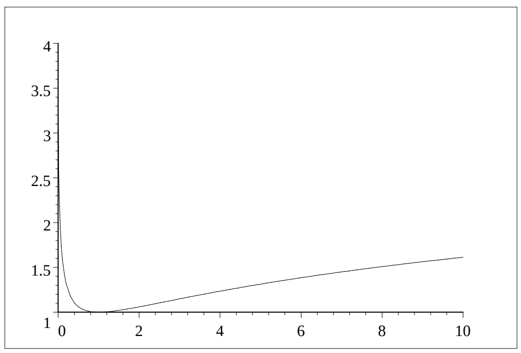
$$f_{\max} = \frac{16\lambda^2\, m^4}{\left(\lambda m + \sqrt{\lambda m^2}\right)^2\left(m + \sqrt{\lambda m^2}\right)^2} = \frac{16\lambda^2}{\left(\lambda + \sqrt{\lambda}\right)^2\left(1 + \sqrt{\lambda}\right)^2} = \frac{16}{\left(1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}\right)^2\left(1 + \sqrt{\lambda}\right)^2} = \frac{16}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\left(1 + \sqrt{\lambda}\right)^2}$$

Ou

$$f_{\max} = \frac{16\lambda}{\left(1 + \sqrt{\lambda}\right)^4}$$

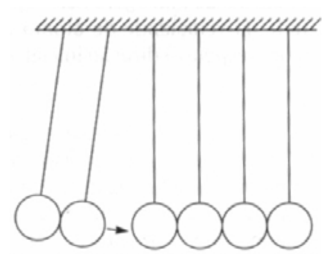
Comparando com o caso (a), para $m \neq m'$ ou seja para $\lambda \neq 1$, encontra-se

$$\frac{f_{\max}}{f^{(a)}} = \frac{\dfrac{16\lambda}{\left(1 + \sqrt{\lambda}\right)^4}}{\dfrac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}} = \frac{4(1+\lambda)^2}{\left(1 + \sqrt{\lambda}\right)^4} > 1 \quad \left(\text{para } \lambda \neq 1\right)$$



★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 7** Num brinquedo bem conhecido, uma série de bolinhas metálicas idênticas, suspensas por fios idênticos presos a um suporte, estão inicialmente todas em contato. Se um determinado número n de bolas é deslocado conjuntamente da posição de equilíbrio e solto (Fig.), o efeito da colisão com as demais é transferir a velocidade v com que colidem a um igual número de bolas na outra extremidade, suspendendo-as. **(a)** Supondo que o efeito da colisão fosse transferir uma velocidade v' a n' bolas adjacentes situadas na outra extremidade, as colisões sendo todas elásticas, mostre que se tem, necessariamente, $n' = n$ e $v' = v$. **(b)** Tomando $n = 2$, e supondo que o efeito da colisão fosse transferir velocidades v_1 e v_2 às duas bolas situadas mais à direita (fig), mostre que, necessariamente $v_1 = v_2 = v$.



▸ **Solução**

☐ **PROBLEMA 8** Uma bala de 5 g incide sobre um pêndulo balístico de massa igual a 2 kg, com uma velocidade de 400 m/s, atravessa-o e emerge do outro lado com uma velocidade de 100 m/s. Calcule a altura de elevação do pêndulo, desprezando a elevação durante o tempo que a bala leva para atravessá-lo. Verifique a validade desta aproximação.

▸ **Solução** O momento antes da colisão vale $P_i = m_b v_{bi} + m_p v_{pi}$ e após a colisão $P_f = m_b v_{bf} + m_p v_{pf}$. Da conservação do momento, sabendo que $v_{bi} = 400$ m/s, $v_{bf} = 100$ m/s e $v_{pi} = 0$

$$m_b v_{bi} = m_b v_{bf} + m_p v_{pf} \Rightarrow 0.005 \times 400 = 0.005 \times 100 + 2v_{pf}$$

ou seja,

$$2v_{pf} = 0.005 \times 400 - 0.005 \times 100 \Rightarrow v_{pf} = \frac{1.5}{2} = 0.75 \text{ m/s}$$

Usando agora a conservação da energia para o pêndulo, isto é, toda energia cinética é transformada em energia potencial gravitacional,

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{pf}^2 \Rightarrow h = \frac{v_{pf}^2}{2g}$$

ou seja,

$$h = \frac{0.75^2}{2 \times 9.8} = 0.029 \text{ m}$$

ou

$$h = 2.9 \text{ cm.}$$

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 9** Durante a madrugada, um carro de luxo, de massa total igual a 2.400 kg, bate na traseira de um carro de massa total 1.200 kg, que estava parado num sinal vermelho. O motorista do carro de luxo alega que o outro estava com as luzes apagadas, e que ele vinha reduzindo a marcha ao aproximar-se do sinal, estando a menos de 10 km/h quando o acidente ocorreu. A perícia constata que o carro de luxo arrastou o outro de uma distância igual a $10,5$ m, e estima o coeficiente de atrito cinético com a estrada no local do acidente em $0,6$. Calcule a que velocidade o carro de luxo vinha realmente.

▸ **Solução** Neste caso a colisão é totalmente inelástica. Da conservação do momento

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v$$

Como o carro foi arrastado por uma distância de $d = 10.5$ m, desacelerado pela força de atrito, que imprime uma aceleração $a = \mu_c g$, então, a velocidade com que os dois carros saíram da colisão pode ser calculada, usando a fórmula de Torricelli, ou seja,

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2\mu_c g d} = \sqrt{2 \times 0.6 \times 9.8 \times 10.5} = 11 \text{ m/s}$$

Logo,

$$v_{1i} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} v \Rightarrow v_{1i} = \frac{(2400 + 1200)}{2400} \sqrt{2 \times 0.6 \times 9.8 \times 10.5} = 16.7 \text{ m/s}$$

$$v_{1i} = 16.7 \times 3.6 = 60 \text{ km/h}$$

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 10** O balconista de uma mercearia, para atender a um cliente que pediu 200 g de creme de leite fresco, coloca o recipiente vazio sobre uma balança de mola, acerta o zero e despeja o creme sobre o recipiente desde uma altura de 75 cm. Depois de 2 s, com a balança marcando 200 g, o balconista, mais que depressa, retira o recipiente de cima da balança. Que quantidade de creme de leite o cliente realmente leva?

▸ **Solução** A transferência de momento do creme para a balança é

$$\Delta p_b = -\Delta p_c = m_c v_i - m_c v_f = m_c v_i$$

onde v_i é a velocidade com que o creme atinge o prato da balança, ao cair de uma altura de 75 cm. Ou seja,

$$v_i = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.75} = 3.8 \text{ m/s}$$

Assim,

$$\Delta p_b = m_c v_i = 3.83 m_c$$

Com 2 s que levou para variar o momento, a força que o creme aplica na balança é

$$F = \frac{\Delta p_b}{\Delta t} = \frac{3.83 m_c}{2} = 1.92 m_c$$

Esta força equivale a uma massa de $m\prime$ dada por

$$m' = \frac{1.92 m_c}{9.8} = 0.196 m_c$$

Portanto, o que o balconista pesou foi a soma das duas massas $m_c + m' = 200$ g, de onde se obtém

$$m_c = 200 - m' \Rightarrow m_c = 200 - 0.196 m_c.$$

ou

$$1.196 m_c = 200 \Rightarrow m_c = \frac{200}{1.196} = 167 \text{ g}.$$

★ ★ ★