Curso de Física Básica - *H. Moysés Nussenzveig*
Resolução do Volume III
Capítulo 2 – A Lei de Coulomb

1 - Mostre que a razão da atração eletrostática para a atração gravitacional entre um elétron e um próton é independente da distância entre eles e calcule essa razão.

2 - Em um litro de hidrogênio gasoso, nas condições **NTP**:
a) Qual é a carga positiva total contida nas moléculas e neutralizada pelos elétrons? *(Resp.: 8,6 x 10^3 C)*
b) Suponha que toda a carga positiva pudesse ser separada da negativa e mantida à distância de 1 m dela. Tratando as duas cargas como puntiformes, calcule a força de atração eletrostática entre elas, em kgf. *(Resp.: 6,8 x 10^{16} kgf).*
c) Compare o resultado com uma estimativa da atração gravitacional da Terra sobre o Pão de Açúcar. *(Resp.: A atração eletrostática é da ordem de 10^6 vezes maior).*

3 - O modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio pode ser comparado ao sistema Terra-Lua, em que o papel da Terra é desempenhado pelo próton e o da Lua pelo elétron, a atração gravitacional sendo substituída pela eletrostática. A distância média entre o elétron e o próton no átomo é da ordem de 0,5 ▯□.

a) Admitindo esse modelo, qual seria a freqüência de revolução do elétron em torno do próton? Compare-a com a freqüência da luz visível. *(Resp.: 7,2 x 10^{15} s^{-1}, da ordem das freqüências da luz visível).*

b) Qual seria a velocidade do elétron na sua órbita? É consistente usar a eletrostática nesse caso? É consistente usar a mecânica não-relativística? *(Resp.: 2,3 x 10^3 km/s, menos de 1% da velocidade da luz, podendo ainda ser tratada como não relativística. Não é consistente, na física clássica, usar a eletrostática neste modelo. Um estado estacionário só é obtido na física quântica).*

4 - Uma carga negativa fica em equilíbrio quando colocada no ponto médio do segmento de reta que une duas cargas positivas idênticas. Mostre que essa posição de equilíbrio é estável para pequenos deslocamentos da carga negativa em direções perpendiculares ao segmento, mas que é instável para pequenos deslocamentos ao longo dele.

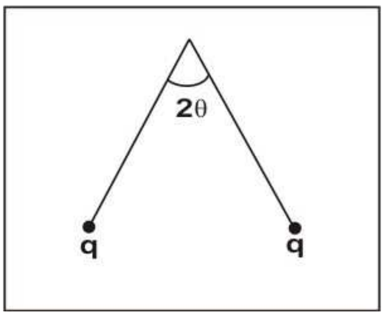
5 - Duas esferinhas idênticas de massa *m* estão carregadas com carga *q* e suspensas por fios isolantes de comprimento *l*. O ângulo de abertura resultante é 2θ (fig.).

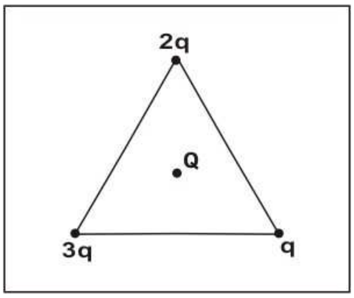
b) Mostre que:

$$q^2 \cos\theta = 16\pi\varepsilon_0 l^2 \, mg \, \mathrm{sen}^3\theta$$

c) Se m = 1 g, *l* = 20 cm e θ = 30°, qual é o valor de *q*?

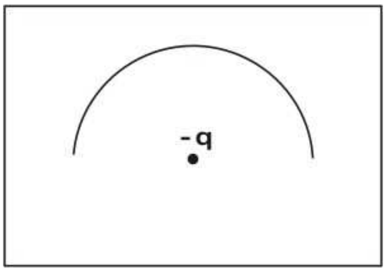
(Resposta: $q^2.\cos\theta = 16\pi\varepsilon_0.l^2.mg.\mathrm{sen}^3\theta$) *(Resp.: 1,6 x 10^{-6} C).*



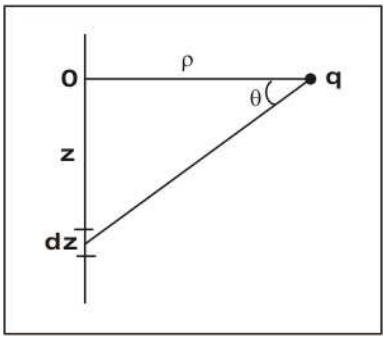


6 - Cargas *q*, 2*q* e 3*q* são colocadas nos vértices de um triângulo eqüilátero de lado *a*. Uma carga Q de mesmo sinal que as outras três é colocada no centro do triângulo. Obtenha a força resultante sobre Q (em módulo, direção e sentido). *(Resp.:* $9\sqrt{3}.q.Q/\left(16\pi\varepsilon_0 a^2\right)$.

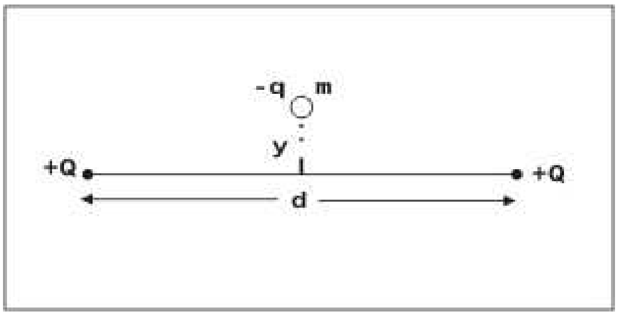
7 - Uma carga Q é distribuída uniformemente sobre um fio semicircular de raio *a*. Calcule a força com que atua sobre uma carga de sinal oposto - *q* colocada no centro. *(Resposta:* $\vec{F} = \dfrac{q.Q}{2\pi^2\varepsilon_0 .a^2}\hat{j}$)



8 - Um fio retilíneo muito longo (trate-o como infinito) está eletrizado com uma densidade linear de carga λ. Calcule a força com que atua sobre uma carga puntiforme *q* colocada à distância ρ do fio. ***Sugestão:*** tome a origem em O e o fio como eixo z. Exprima a contribuição de um elemento dz do fio à distância z da origem em função do ângulo θ da figura. Use argumentos de simetria. *(Resp.: $q\lambda/(2.\pi^2.\varepsilon_0.\rho)$, radial para fora).*



9 - Uma partícula de massa *m* e carga negativa - *q* está vinculada a mover-se sobre a mediatriz do segmento que liga duas cargas positivas + Q, separadas por uma distância *d*. Inicialmente, a partícula y << *d* do centro desse segmento. Mostre que ela executa um movimento harmônico simples em torno do centro, e calcule a freqüência angular ω de oscilação. *(Resp.:* $\omega = 2\left(\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0 md^3}\right)^{1/2}$).



Resoluções

R-1)

$$\left|\text{Força eletrostática}\right| = \left|F_e\right| \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{e^2}{d^2}$$

$$\left|\text{Força gravitacional}\right| = \left|F_g\right| = \frac{G.m_e.m_p}{d^2}$$

Dividindo $|F_e|$ / $|F_g|$, vemos que o termo d² desaparece.Logo a razão entre as duas interações não depende da distância entre o elétron e o próton.
Para o cálculo da razão, utilize:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}98755 \text{ x } 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$$

m_e (massa do elétron) = 9,109 390 x 10^{-31} kg
m_p (massa do próton) = 1,672 623 x 10^{-27} kg
e (carga elementar) = 1,602 177 x 10^{-19} C
G = 6,672 6 x 10^{-11} M.m²/kg²

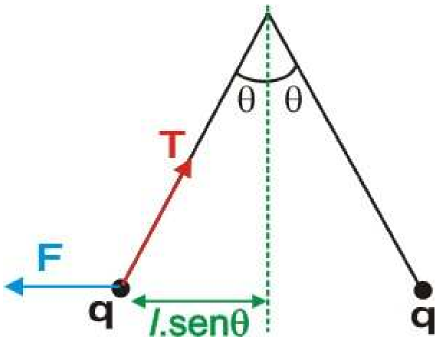
R-2)

a) 1 mol de gás perfeito ocupa 22,4 litros nas CNTP, logo 1 litro de hidrogenio tem 1/22,4 moles de hidrogênio. Multiplicado pelo numero de Avogrado tem-se 2,6884 x 10^{22} moléculas.Como cada molécula tem 2 átomos tem-se 5,3768 x 10^{22} átomos. Multiplicados pela carga do elétron em

coloumb tem-se   8,6 x10^3 C.
Observação: Cada átomo de Hidrogênio possui 1 elétron.O número de Avogrado é 6,0221.10^23. A carga do elétron é 1,6.10^-19 C. A carga global positiva é igual a carga global negativa.

b)

R-5)



Traçando dois eixos de coordenadas cartesianas sobre a figura, obtêm-se, para uma das cargas:

Em x (eixo na direção versor **i**, positivo para a direita).
Pela condição de equilíbrio:
T.senθ - F = 0 (I)

Em y (eixo na direção do versor **j,** positivo para cima).
T.cosθ - m.g = 0 (m.g é o peso da carga q, em questão). (II)

De (I) e (II), obtêm-se:
(F/senθ).cosθ - m.g = 0

Mas F é a força elétrica entre as cargas:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(2.l.\operatorname{sen}\theta)^2} \cos\theta = m.g.\operatorname{sen}\theta$$

Resolvendo, chega-se a:

$$q^2.\cos\theta = 16\pi\varepsilon_0.l^2.mg.\operatorname{sen}^3\theta$$

R-7) Cada elemento de comprimento d*l* do fio, com carga dQ, contribui com uma força dF sobre a carga (-q). Sendo λ a densidade linear de carga no fio, temos;

$Q = \lambda.(2\pi a)/2 = \lambda.\pi.a$ (I)

ou

$dQ = \lambda.dl = \lambda.a.d\theta$ (II)

Em coordenadas polares, tem-se:

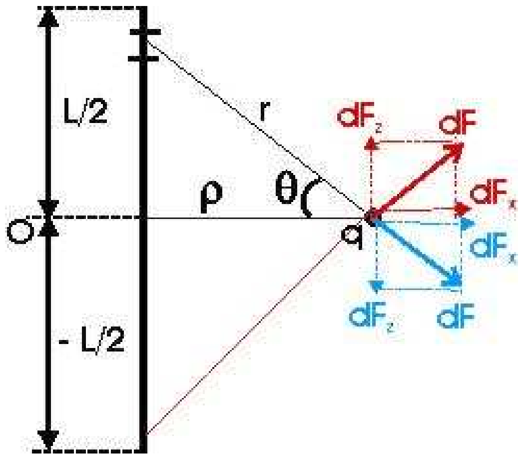
$$\begin{cases} x = a.\cos\theta \\ y = a.\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.dQ}{a^2}.\left(a.\cos\theta\,\hat{i} + a.\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}\right) = \frac{\lambda.q.a}{4\pi\varepsilon_0.a^2}.d\theta.\frac{a.\left(\cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}\right)}{a}$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda.q}{4\pi\varepsilon_0.a}.\int_0^{\pi}(\cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}).d\theta$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda.q}{4\pi\varepsilon_0.a}.2\,\hat{j} = \frac{\lambda.q}{2\pi\varepsilon_0.a}.\frac{\pi.a}{\pi.a}\,\hat{j} = \frac{q.\lambda.\pi.a}{2\pi^2\varepsilon_0.a^2}\,\hat{j} = \frac{q.Q}{2\pi^2\varepsilon_0.a^2}\,\hat{j}$$

R-8)



Vamos considerar, a princípio, o fio de comprimento L.

$\vec{r} = \rho\hat{i} + z\hat{k}$

Sendo dQ a carga de um elemento dz do fio:

$dQ = \lambda.dz$ ($\lambda > 0$ e eixo z com sentido positivo para cima)

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.dQ}{r^2}\hat{r}$$

Por simetria, componentes dF na direção paralela ao fio cancelam-se (veja na figura que cada dF, em vermelho, cancela-se com a outra componente, em azul, na direção do eixo z). Logo, a força elétrica resultante sobre a carga q é:

$\left|dF_x\right| = \left|d\vec{F}\right|\cos\theta$ perpendicular ao fio

onde $\cos\theta = \dfrac{\rho}{r} = \dfrac{\rho}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}}$

$$dF_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.\lambda.dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}\rho$$

$$F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q.\lambda.\rho.\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q.\lambda.\rho.2.\int_0^L\frac{dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

A integral anterior pode ser calculada por:

$$\int\frac{ds}{\left(a^2+s^2\right)^{3/2}} = \frac{s}{a^2.\sqrt{a^2+s^2}}$$

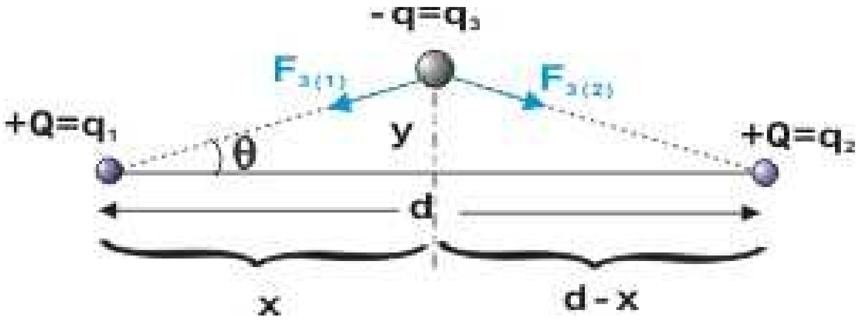
Assim:

$$F_x = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}.q.\lambda.\rho.\left[\frac{z}{\rho^2.\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]_0^L = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.\lambda}{\rho}.\frac{1}{\sqrt{\rho^2+L^2}} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.\lambda}{\rho}.\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho^2}{L^2}+1}}$$

Quando L → ∞ (fio muito longo), a força torna-se:

$F_x = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.\lambda}{\rho} = \frac{q.\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}$, direção radial, para fora.

R-9)



a) Condição de equilíbrio na horizontal (direção do versor **i**):

$F_{3(1)}$ (**-i**) = $F_{3(2)}$ **i**

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{\left(x^2+y^2\right)}.\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{\left[(d-x)^2+y^2\right]}.\cos\theta$$

$x^2 + y^2 = d^2 - 2dx + x^2 + y^2 \Rightarrow d(d-2x) = 0$

Como $d \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = d/2$

Condição de equilíbrio na vertical:

$$2.F.\operatorname{sen}\theta = 0 \;\Rightarrow\; 2.F.\frac{y}{\underbrace{\left(\frac{d^2}{4}+y^2\right)^{1/2}}_{B}} = 0$$

Como $F \neq 0$ e $B \neq 0$ então **y = 0**

b) F na direção y atuará como uma força restauradora, logo:

$$F_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{qQ}{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right]}.\frac{y}{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right]^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad F_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.Q.y}{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right]^{3/2}}$$

Fazendo:

$$C = \frac{q.Q}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \text{e} \qquad D = \frac{d}{2}$$

$$F_y = -C.\frac{y}{\left(D^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

Em MHS, temos: $F = m.\frac{d^2y}{dt^2}$

Comparando com a força eletrostática:

$$F_y = m.\frac{d^2y}{dt^2} = -C.\frac{y}{\left(D^2 + y^2\right)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{C}{m}.\frac{y}{\left(D^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

Para deslocamentos muito pequenos de y, $y_0 << D$, fazemos, por expansão de Taylor:
$f(y) = (D^2 + y^2)$
$f(y) = f(y_0) + f'(y_0).(y - y_0) + (1/2!).f''(y_0).(y - y_0)^2$
E obtemos
$f(y) = D^2$
Substituindo na expressão acima:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{C}{m}.\frac{y}{D^3}$$

Assim, a freqüência angular ω será:

$$\omega = \left(\frac{C}{m}.\frac{y}{D^3}\right)^{1/2} = \left(\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 m}.\frac{y}{\left(\frac{d}{2}\right)^3}\right)^{1/2} = 2\left(\frac{Qqy}{\pi\varepsilon_0 md^3}\right)^{1/2}$$