ComSizo

conhecimento para todos

Capítulo 01

Mecânica newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana

João Barcelos Neto

ComSizo.com.br

terça

Quinta

Cap 1. (7 exercícios)

14 – 17

cap 3: (31 exercícios)

sexta 8 – 12

cap 1. Obtenha as equações de movimento para o caso de aceleração constante no movimento unidimensional.

Considerando que o movimento ocorre sobre o eixo x, temos $v = \frac{dx}{dt}$ (I) $a = \frac{dv}{dt}$ (II)

Como a constante

$$a\,dt = dv \Rightarrow at = v(t) - C_1$$

C_1 é constante corresponde à velocidade no instante $t=0$, chamando a velocidade neste instante d

$v(t) = at + v_0$ (III), subst. III em I

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

$$dx = \int_0^t (v_0 + at)\,dt$$

$$x - C_2 = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

onde a cte C_2 é a posição no instante $t=0$.

Chamando esta quantidade de x_0, temos:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

1.2 Seja o movimento de uma partícula sobre o eixo x. A posição da partícula em cada instante é dada por $x(t) = t^3 - 7{,}5t^2 + 18t + 3$ (t é medido em segundos e x em metros.

a) Qual a posição da partícula no instante $t=0$? E no instante $t=1\,s$? E para t infinito?

Para calcularmos as seguintes posições da partícula em cada instante, devemos substituir em $x(t) = t^3 - 7{,}5t^2 + 18t + 3$

Assim para $t=0$

$$x(0) = 3m$$

Para $t=1$

$$x(1) = 1^3 - 7{,}5(1)^2 + 18.1 + 3$$

$$x(1) = 14{,}5\,m$$

Para $t=\infty$

$$x(\infty) = \infty^3 - 7{,}5(\infty)^2 + 18.(\infty) + 3$$

$$x(\infty) = \infty$$

b) Em que instantes a partícula pára?

A partícula para quando $v(t)=0$, e sabemos que

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

logo; $v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 7{,}5.2t + 18$

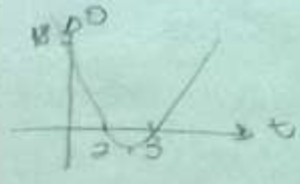
$v = 3t^2 - 15t + 18$, como queremos saber o instante em que $v=0$, caímos em uma eq. 2º grau

Assim $t = \frac{+15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4.3.18}}{3.2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow t' = 3s$

$t'' = 2s$

A partícula só para no instante $t=3s$ e $t=2s$.

c) Qual a ~~região~~ região onde a partícula está em movimento acelerado? Qual a região onde o movimento é retardado?



Para saber em qual região a partícula está em movimento acelerado ou retardado devemos analisar o gráfico $v \times t$, onde

$v>0$ $\begin{cases} V \text{ cresce, a cresce} \\ V \text{ decresce, a decresce} \end{cases}$

onde $V<0 \Rightarrow |v|$ $\begin{cases} |v| \text{ cresce, } v \text{ decresce, a cresce} \\ |v| \text{ decresce, } v \text{ cresce, a decresce} \end{cases}$

Assim;

p/ $t<2$, $v>0$ a decresce (retardado)

p/ $2<t<2{,}5$, $v<0$ v decresce a cresce (acelerado

p/ $2{,}5<t<3$, $v<0$ cresce a decresce (retardado)

1.3. Uma partícula, também em movimento unidimensional, possui aceleração dada por $a(t) = t^2 - 1 (m/s^2)$

a) Sabendo-se que no instante $t = 0$ a velocidade da partícula é nula, calcule a velocidade da partícula num instante qualquer. Qual a velocidade da partícula para $t = 1$ s? E para $t = 2$ s?

$$\int (t^2 - 1)\,dt = \int dv$$

$$\frac{t^3}{3} - t = v + C$$

para calcular o valor de C o problema nos deu uma condição de contorno, que é $t = 0 \Rightarrow v = 0$, assim $\frac{0^3}{3} - 0 = 0 + C \rightarrow C = 0$

logo a nossa constante $C = 0$, e a velocidade da partícula num instante qualquer é $v = \frac{t^3}{3} - t$, para calcularmos a velocidade da partícula no instante desejado basta substituir o valor do instante na expressão:

logo p/ $t = 1$ s

teremos $v(1) = \frac{1^3}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

p/ $t = 2$ s $\quad v(2) = \frac{2^3}{3} - 2 = \frac{8 - 6}{3} = \frac{2}{3}$

b) Sabendo-se ainda que no instante $t=0$ a partícula está na posição $x=1$ m calcule a posição da partícula num instante qualquer. Qual a posição para $t=1s$? E para $t=2s$?

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \left(\frac{t^3}{3} - t\right)dt = dx$$

$$\frac{t^4}{3.4} - \frac{t^2}{2} + C_2 = x$$

condição de contorno $t=0 \Rightarrow x = 1m$

$1 = C_2 \Rightarrow C_2 = 1$

Posição da partícula num instante qualquer é $x(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{t^2}{2} + 1$

Para $t = 1s$ $x(1) = \frac{1^4}{12} - \frac{1^2}{2} + 1$

$$= \frac{1-6+12}{12} = \frac{7}{12} m$$

Para $t = 2s$

$$x(2) = \frac{2^4}{4.3} - \frac{2^2}{2} + 1$$

$$= \frac{4}{3} - 2 + 1 = \frac{1}{3} m$$

c) Onde a partícula pára? Em que região o movimento é acelerado? Onde é retardado? Em que região a partícula está indo? Onde está voltando?

$v = 0$, $v = \frac{t^3}{3} - t = 0 \Rightarrow t\left(\frac{t^2}{3} - 1\right) = 0$

$\frac{t^2}{3} = 1 \Rightarrow t = \pm\sqrt{3} = \pm 1{,}73$

$a(t) = 0$, $t = \pm 1$, $v(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - (-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

$t < -1{,}73$; $v < 0$ $v\uparrow$ $a\downarrow$

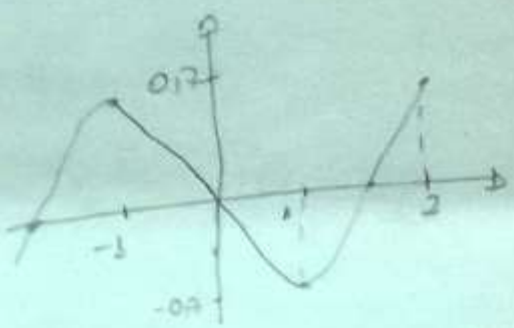
$-1 > t > -1{,}73$; $v > 0$ $v\uparrow$ $a\uparrow$

$-1 < t < 0$; $v > 0$ $v\downarrow$ $a\downarrow$

$0 < t < 1$; $v < 0$ $v\downarrow$ $a\uparrow$

$1 < t < 1{,}73$; $v < 0$ $v\uparrow$ $a\downarrow$

$t > 1{,}73$; $v > 0$ $v\uparrow$ $a\uparrow$



O gráfico $v \times t$ para onde tá indo $v > 0$ e onde volta $v < 0$

1.1. Seja o movimento de uma partícula, numa dimensão, dado por $x(t) = A \operatorname{sen} \omega t$, onde A e ω são constantes.
a) Em que região do eixo x o movimento ocorre? b) Quais os significados das constantes A e ω? c) Calcule a velocidade e a aceleração em cada ponto.

a) em $-A < x < A$, pois seno de qualquer angulo $-1 < \operatorname{sen}\theta < 1$

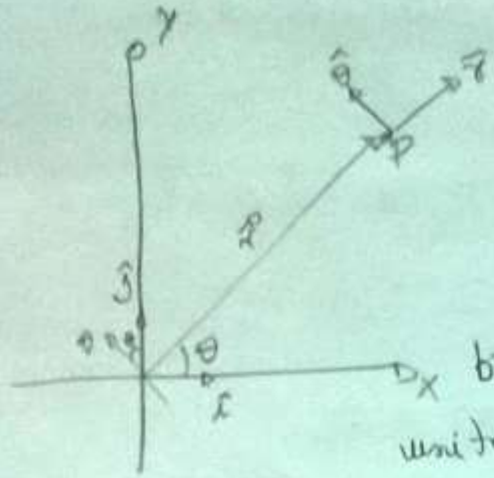
b) A é amplitude do movimento
ω é a frequência angular, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

c) $x(t) = A \operatorname{sen} \omega t$

$v = \frac{dx}{dt} = A(\cos \omega t)\omega = A\omega \cos \omega t$

$a = \frac{dv}{dt} = A\omega(-\operatorname{sen} \omega t)\omega = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$

1.5 O vetor posição $\vec{r}$ de um ponto qualquer P no plano x,y fica também completamente caracterizado pelo seu módulo r e pelo ângulo θ que faz com...



a) o vetor $\vec{r}$ em termos dos unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$.

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{i} + r\,\text{sen}\,\theta\,\hat{j}$$

b) o vetor $\vec{r}$ em termos dos unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$.

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

c) os unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ em termos de $\hat{i}$ e $\hat{j}$.

$$\hat{r} = |\hat{r}|\cos\theta\,\hat{i} + |\hat{r}|\,\text{sen}\,\theta\,\hat{j} = \cos\theta\,\hat{i} + \text{sen}\,\theta\,\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = |\hat{\theta}|(-\text{sen}\,\theta\,\hat{i}) + |\hat{\theta}|\cos\theta\,\hat{j} = -\text{sen}\,\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

d) os unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$ em termos de $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$.

$$\hat{i} = |\hat{i}|\cos\theta\,\hat{r} + |\hat{i}|(-\text{sen}\,\theta)\,\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{r} - \text{sen}\,\theta\,\hat{\theta}$$

$$\hat{j} = |\hat{j}|\,\text{sen}\,\theta\,\hat{r} + |\hat{j}|\cos\theta\,\hat{\theta} = \text{sen}\,\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}$$

Mostre também que

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(r\cos\theta\,\hat{i} + r\,\text{sen}\,\theta\,\hat{j})}{dt} = \dot{r}\cos\theta\,\hat{i} + r(-\text{sen}\,\theta)\dot{\theta}\hat{i} + \dot{r}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{j} + r(\cos\theta)\dot{\theta}\hat{j}$$

$$v = \dot{r}\underbrace{(\cos\theta\,\hat{i} + \text{sen}\,\theta\,\hat{j})}_{\hat{r}} + r\dot{\theta}\underbrace{(-\text{sen}\,\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})}_{\hat{\theta}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\dot r(\cos\theta\,\hat i + \sin\theta\,\hat j) + r\dot\theta(-\sin\theta\,\hat i + \cos\theta\,\hat j))}{dt}$$

$$a = \ddot r\hat r + \dot r\underbrace{(-\sin\theta\,\dot\theta\,\hat i + \cos\theta\,\dot\theta\,\hat j)}_{\hat\theta} + \dot r\dot\theta\hat\theta + r[\ddot\theta\hat\theta + \dot\theta(-\cos\theta\,\dot\theta\,\hat i - \sin\theta\,\dot\theta\,\hat j)]$$

$$a = \ddot r\hat r + \dot r\dot\theta\hat\theta + \dot r\dot\theta\hat\theta + r\ddot\theta\hat\theta + r\dot\theta\dot\theta(-\hat r) = (\ddot r - r\dot\theta^2)\hat r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\hat\theta$$

1.6. Um corpo está se movendo sobre uma linha reta. Sua aceleração é dada por $a = -2x$, onde x é medido em metros e a em m/s^2. Ache a relação entre a velocidade e a distância, dado que em $x=0$, $v = 4\,m/s$.

$a = -2x$, relação entre v e a distância.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot v = -2x \Rightarrow v\,dv = -2x\,dx$$

$$\int v\,dv = -2\int x\,dx \Rightarrow \frac{v^2}{2} + C_1 = -\frac{2x^2}{2} + C_2 \;,\; C_3 = C_2 - C_1$$

$$\frac{v^2}{2} = -x^2 + C_3 \Rightarrow p/\,x=0 \text{ e } v = 4\,m/s$$

$$\frac{4^2}{2} = C_3 \Rightarrow 8 = C_3$$

$$\frac{v^2}{2} = -x^2 + 8 = v^2 = -2x^2 + 16 \Rightarrow v = \sqrt{16 - 2x^2}$$

$$\int_4^v v\,dv = -2\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}(v^2 - 16) = -x^2 \Rightarrow v^2 = 16 - 2x^2$$

$$v = \sqrt{16 - 2x^2}$$