ComSizo

conhecimento para todos

Capítulo 03

Mecânica newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana

João Barcelos Neto

ComSizo.com.br

32

$\vec{v}_0 = 5\,m/s$

$\vec{g} = -g\,\text{sen}\,30°\,\hat{i} - g\cos 30\,\hat{j}$

$v_0 = 5\cos 30°\,\hat{i} + 5\,\text{sen}\,30\,\hat{j} = I$

Qual o alcance, computado sobre a superfície do plano inclinado?

Durante o movimento atua sobre o corpo somente a força gravitacional logo;

$\vec{F} = -\vec{g}\,m = (-g\,\text{sen}\,30°\,\hat{i} - g\cos 30\,\hat{j})\,m$, onde m é a massa do corpo, e tomando uma aproximação de $\vec{g}$ igual a 10 para facilitar os cálculos temos.

$\vec{F} = (-10\,\text{sen}\,30 - 10\cos 30\,j)\,m.$

Sabemos também que F é a força resultante assim pela 2ª lei de Newton.

$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = (-10\,\text{sen}\,30°\,\hat{i} - 10\cos 30°\,\hat{j})\,m$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = -10\,\text{sen}\,30\,\hat{i} - 10\cos 30\,\hat{j} \Rightarrow$ integrando

$v - v_0 = -10\,\text{sen}\,30\,t\,\hat{i} - 10\cos 30\,t\,\hat{j}$

v_0 ocorre no instante $t=0$ assim $v(0) = v_0 = I$

assim $v = (5\cos 30 - 10\,\text{sen}\,30\,t)\,\hat{i} + (5\,\text{sen}\,30 - 10\cos 30\,t)\,\hat{j}$

$d\vec{r} = [(5\cos 30 - 10\,\text{sen}\,30\,t)\,\hat{i} + (5\,\text{sen}\,30 - 10\cos 30\,t)\,\hat{j}]\,dt$

$r - r_0 = (5t\cos 30 - \frac{10}{2}t^2\,\text{sen}\,30)\,\hat{i} + (5t\,\text{sen}\,30 - \frac{10}{2}t^2\cos 30)\,\hat{j}$

pelas condições iniciais do problema $\vec{r}_0 = 0 = \vec{r}(0)$

Quando o corpo atinge o plano inclinado a componente y de r será igual a zero. Assim

$5(t\,\text{sen}\,30° - t^2\cos 30) = 0 \Rightarrow t(\text{sen}\,30° - t\cos 30) = 0$

$t = \frac{\text{sen}\,30°}{\cos 30} = \text{tg}\,30° = 0{,}577$, utilizando o componente x de $\vec{r}$ temos:

$5t\cos 30 - 5t^2\,\text{sen}\,30° = x \therefore x = 5\,\text{tg}\,30°\cos 30 - 5\,\text{tg}^2 3$

$= 1{,}665$

3.3 sabemos que o campo gravitacional medido sobre a superfície da terra é (6)

$\vec{g} = -\frac{GM}{R^2}$, sabemos também que 1% desse valor pode ser expresso como $\frac{1}{100}\vec{g} = \frac{1}{100}\frac{(-GM)}{R^2}$

agora subtraindo o 1% do todo temos

$$\vec{g}' = -\frac{GM}{R^2} - \frac{(-GM)}{100R^2} = \frac{-100GM + GM}{100R^2} = -\frac{99GM}{100R^2}$$

onde $\vec{g}'$ é a gravidade na qual queremos calcular, que pode ser expresso ainda como $\vec{g}' = -\frac{GM}{r^2}$, com $r = R+h$, igualando as duas expressões de $\vec{g}'$ temos: $-\frac{99GM}{100R^2} = -\frac{GM}{(R+h)^2} \Rightarrow 99(R+h)^2 = 100R^2$

$\Rightarrow \sqrt{99}(R+h) = 10R \Rightarrow 10R - \sqrt{99}R = \sqrt{99}h \Rightarrow$

$h = \frac{R(10-\sqrt{99})}{\sqrt{99}}$, sabemos que $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

temos $h = 32\,090{,}88 = 32{,}1$ km

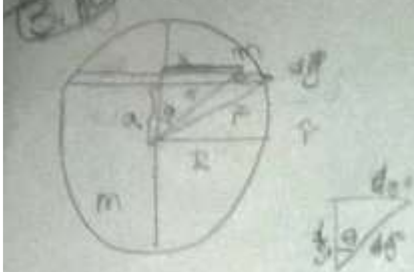
3.4 b) Definição de campo gravitacional $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$,

como $\vec{F}_s = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{g}_s = -\frac{\frac{GMm}{r^2}}{m}\hat{r} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$

Assim $\vec{g}_s = -\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11})(5{,}98 \cdot 10^{24})}{(6{,}37 \cdot 10^6 + 35{,}9 \cdot 10^6)^2}\hat{r} = \frac{3{,}98866 \cdot 10^{14}}{1{,}7867529 \cdot 10^{15}}$

$\vec{g}_s = 0{,}223235$ m/s^2

3.10



$$dg = \frac{G\,dm}{R'^2} = -\frac{G\,dm}{(a^2+x^2)}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{R'} = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$dg_1 = dg\cos\theta$$

$$dg_1 = -\frac{G\,dm}{R^2}\cdot\frac{a}{R} = \frac{G\,dMa}{R^3}$$

$$dg_1 = -\frac{G\,d\,Ma}{(a^2+x^2)^{3/2}}, \quad dm = \frac{M\,2\pi\,x\,dx}{4\pi R^2}$$

$$dM = \frac{Mx\,dx}{2R^2}$$

$$g_1 = -\frac{GaM}{2R^2}\int\frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{x}{a}$$

$$x = a\operatorname{tg}\theta \Rightarrow dx = a\sec^2\theta\,d\theta$$

$$g_1 = -\frac{GaM}{2R^2}\int\frac{a\operatorname{tg}\theta\; a\sec^2\theta\,d\theta}{a^3\sec^3\theta} = -\frac{GM}{2R^2}\int\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta$$

$$= -\frac{GM}{2R^2}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{GM}{2R^2}(0+1) = -\frac{GM}{2R^2}$$

$$g_1 = -\frac{GM'}{2r^2}, \quad M' = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Mr^3}{R^3}$$

$$g_1 = -\frac{GMr^3}{2r^2R^3} = a = -\frac{GMr}{2R^3} = \frac{v\,dv}{dr}$$

$$\int_0^v v\,dv = -\int_R^r \frac{GMr}{2R^3}\,dr \Rightarrow \frac{v^2}{2} = -\frac{GM}{2R^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_R^r \Rightarrow v^2 = -\frac{GM}{2R^3}(r^2-R^2)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{2R^3}(R^2-r^2)} = \frac{dr}{dt}$$

$$\sqrt{\frac{GM}{2R^3}}\,dt = \frac{1}{(R^2-R^2)^{1/2}}\,dr$$

$r = R\,\mathrm{sen}\,\phi \Rightarrow dr = R\cos\phi\, d\phi$

$$\sqrt{\frac{Gm}{2R^3}}\, dt = \int \frac{R\cos\phi\, d\phi}{(R^2 - R^2\,\mathrm{sen}^2\phi)^{1/2}} = \int d\phi \Rightarrow$$

$$\phi = \sqrt{\frac{Gm}{2R^3}}\, t + \text{cons}^{te} \qquad \phi = \mathrm{arc\,sen}\,\frac{r}{R}$$

$$\mathrm{arc\,sen}\,\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{Gm}{2R^3}}\, t + k$$

$$\frac{r}{R} = \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{Gm}{2R^3}}\, t + k\right)$$

$$r = R\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{Gm}{2R^3}}\, t + k\right)$$

p/ $t = 0$, $r = R \Rightarrow k = \frac{\pi}{2}$

$$r(t) = R\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{Gm}{2R^3}}\, t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{\frac{Gm}{2R^3}} = \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2R^3}{Gm}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(6{,}37\cdot 10^6)^3}{(6{,}67\cdot 10^{-11})(5{,}98\cdot 10^{24})}} = 7153{,}037\,s$$

$$T = 119{,}217\ \text{min}$$